Sveučilište u Zagrebu
Filozofski fakultet
Odsjek za psihologiju

ISPITIVANJE JAČINE IZRAŽENOSTI ILUZIJE LINEARNOSTI KOD UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Miroslav Rajter

Mentorica: Dr.sc. Vesna Vlahović-Štetić, izv. prof.

Zagreb, 2006

SADRŽAJ

SAŽETAK

NASLOV: Ispitivanje jačine izraženosti iluzije linearnosti kod učenika srednjih škola

Predmet ovog rada je ispitivanje snage iluzije linearnosti kod učenika srednjih škola. Iluzija linearnosti (ili proporcionalnosti) odnosi se na pogrešku koja se javlja kod rješavanja zadataka kada na osnovu povećanja neke dužine za faktor k, ljudi (pogrešno) smatraju da se površine i volumeni također povećavaju za faktor k. Ispravno rješavanje bilo bi takvo da na osnovu povećanja neke mjere dužine za faktor k dolazi do povećanja ostalih mjera dužine za faktor k, površina za faktor k^2, a volumena za faktor k^3. Za potrebe ovog rada konstruirane su tri liste sa zadacima višestrukog izbora. Forma A sadržavala je pet zadataka koji su podložni iluziji linearnosti (tzv. ne-linearni zadaci) i za svaki je zadatak bilo ponuđeno pet rješenja. Među tih pet rješenja jedno se može dobiti ako je ispitanik podložan iluziji linearnosti (tzv. linerano rješenje), jedno je točno rješenje (tzv. ne-linearno rješenje), dok su preostala rješenja služila kako bi se smanjila vjerojatnost pogađanja. Forma B je po zadacima identična formi A. Razlika je u ponuđenim rješenjima i to tako da u formi B nije ponuđeno ono rješenje koje bi se dobilo ako je ispitanik podložan iluziji linearnosti. U formi C bili su zadaci kod kojih je linearno rješenje ispravno (tzv. linearni zadaci). U istraživanju su sudjelovali učenici opće gimnazije i to prvog razreda (starosti 14-15 godina) i četvrtog razreda (starosti 17-18 godina).

Dobiveni rezultati pokazuju da su gotovo svi učenici ispravno riješili linearne zadatke. Pokazalo se kako ne-linearne zadatke rješavaju slabije od linearnih. Oni učenici koji kod ne-linearnih zadataka nisu imali ponuđeno linearno rješenje rješavali su ne-linearne zadatke značajno bolje od učenika koji su kod tih zadataka imali ponuđeno linearno rješenje. Također, kada nemaju ponuđeno ne-linearno rješenje, mladići su značajno bolje rješavali ne-linearne zadatke od djevojaka. Pronađena je i razlika prema dobi, pri čemu stariji ispitanici značajno bolje rješavaju ne-linearne zadatke od mlađih ispitanika.

Ključne riječi: poučavanje matematike, strategije rješavanja problema, proporcionalnost, iluzija linearnosti

SUMMARY

TITLE: Examination of Intensity of Illusion of Linearity among High School Pupils

This investigation discusses the strength of the illusion of linearity on high school pupils. Illusion of linearity (or proportionality) is an error in solving mathematical problems when people (wrongly) believe that when a certain length is enlarged by factor k, area and volume should also be enlarged by factor k. Correct solution would be that when a certain length is enlarged by factor k, other lengths are also enlarged by factor k, areas by factor k^2, and volumes by factor k^3. For the purpose of this investigation three lists of mathematical problems with multiple choice answers were constructed. In Form A there were five problems that were likely to induce the illusion of linearity (also called non-linear problems) and every problem had five answers offered. Among these five answers, one answer represents solution with an illusion of linearity (also called linear solution), one answer represents the correct solution (also called non-linear solution) and other three answers are distracters designed to lower the probability of guessing. Form B had mathematical problems that were identical to problems in Form A, but the linear solution was excluded from the offered answers. Form C had mathematical problems which required the linear solution (also called linear problems). Participants in this investigation were pupils of general-program high school, first grade (aged 14-15) and fourth grade (aged 17-18).

The results showed that almost all pupils solved linear problems correctly. They were worse in solving non-linear problems than in solving linear ones. Pupils who didn't have linear solution offered to a non-linear problem were better in solving non-linear problems than pupils who had linear solution among offered answers. When a linear solution was excluded from the list of answers to non-linear problems, boys were better in solving non-linear problems than girls. Difference between the age groups was also found; older pupils were significantly better in solving non-linear problems.

Key words: Teaching of mathematics, problem solving strategies, proportionality, illusion of linearity

1. UVOD

STRATEGIJE RJEŠAVANJA MATEMATIČKIH ZADATAKA RIJEČIMA

Problemi riječima često se koriste u nastavi matematike. Njihova svrha je primjena formalnog matematičkog znanja i vještina u stvarnim životnim situacijama, razvijanje učenikovih općenitih kapaciteta za rješavanje problema, uvođenje raznolikosti u nastavu matematike i motiviranje učenika. Ipak, čini se kako je efikasnost tih zadataka upitna. Nesher (1980, prema Verschaffel i De Corte, 1997) pokazuje kako po završetku osnovne škole mnogi učenici ne vide primjenjivost formalnog matematičkog znanja i vještina u stvarnim životnim situacijama.

Postoje razni pristupi proučavanju rješavanja zadataka riječima, a jedan od predloženih je Fishbeinova teorija implicitnih modela.

Temeljna postavka teorije implicitnih modela je da se ljudi pri rješavanju problema koriste intuitivnim, primitivnim, modelima pomoću kojih razne problemske situacije kategoriziraju prema unaprijed predviđenim shemama: «Svaka osnovna aritmetička operacija općenito ostaje povezana s implicitnim, nesvjesnim i primitivnim intuitivnim modelom. Utvrđivanje operacije koja je potrebna da se riješi zadatak sa dvije brojčane vrijednosti ne odvija se izravno, već je posredovano putem intuitivnog modela. Ovaj model nameće vlastita ograničenja u procesu traženja.» (Fishbein i sur., 1985; prema Nesher, 1992) Postoje razni primjeri tih implicitnih modela: od toga da djeca pokušavaju množiti tako da uzastopce zbrajaju, vjeruju da množenje uvijek povećava, da povećanje neke dužine geometrijskog lika za faktor k znači i povećanje površine za faktor k i drugo.

Čini se kako se ovi implicitni modeli razvijaju zbog toga što su zadaci u školi razmjerno stereotipni (prema Greer, 1987). Zbog toga učenici, kako bi povećali efikasnost i brzinu rješavanja zadataka postaju skloniji upotrebljavati te tzv. «površinske» modele, umjesto da se oko svakog zadatka trude kako bi uspjeli stvoriti odgovarajuće predodžbe i strategije za rješavanje zadataka. Sowder, Threadgill-Sowder, Moyer i Moyer (prema Greer, 1987) su utvrdili sljedeće strategije koje djeca koriste da bi odlučila koju računsku operaciju treba primijeniti:

- Traže brojeve i zbrajaju
- Pogađaju operaciju
- Računaju sve mogućnosti i biraju najvjerojatniju

- Određuju veličinu rješenja s obzirom na operand. Ako je veći, pokušavaju zbrajati i množiti, a zatim odabiru logičnije rješenje; ako je manji pokušavaju oduzimati i dijeliti, i odabiru logičnije rješenje
- Traže «ključnu» riječ koja ukazuje na točnu računsku operaciju

Ovo se, naravno, odnosi na te tzv. površinske strategije. Kako je već navedeno, zadaci riječima su relativno stereotipni. Zbog toga ove strategije u određenom broju slučajeva dovode to točnog rješenja zadatka i time učenici dobivaju potkrepljenje i u stvari se uče korištenju tih strategija. Ove se strategije ponekad više ili manje izravno poučavaju u školi, a izvode ih i sama djeca, vjerojatno implicitno i nesvjesno, kao odgovor na neke značajke suvremenog poučavanja u školi (Verschaffel i De Corte, 1997). Osiromašen i stereotipan skup zadataka koji se trenutačno upotrebljavaju, a koji ponekad neopravdano osiguravaju uspješnost primjene površnih strategija (Schoenfeld, 1991; prema Verschaffel i De Corte, 1997), sigurno potkrepljuje učenje i korištenje tih strategija. Reusser (1988; prema Verschaffel i De Corte, 1997) navodi da vrlo malo problemskih zadataka u udžbenicima prisiljava učenike na duboku semantičku analizu. Pored toga Sowder (1988; prema Verschaffel i De Corte, 1997) kao uzrok navodi usmjerenost ka produktu u poučavanju i provjeravanju elementarne matematike, što za posljedicu ima vjerovanje nastavnika da točno rješenje znači siguran indikator ispravnog mišljenja. Sama karakteristika ispitivanja znanja matematike je da se često koriste testovi koji osim elemenata testova snage, imaju vremensko ograničenje. To postavlja zahtjev učenicima da što brže odrede operaciju potrebnu za rješavanje problema i zapravo ih potiče da razvijaju strategije koje su površne, ali zato brže dovode do rješenja, a koje zbog, kako je već navedeno, stereotipnosti zadataka često dovode do točnog rješenja.. Uz to se veže prerano odvraćanje od više intuitivnih ili neformalnih strategija rješavanja (Fuson, 1992; Treffers, 1987; prema Verschaffel i De Corte, 1997)

Sam proces rješavanja zadataka započinje stvaranjem predodžbi o zadatku, tj. O osnovnim semantičkim vezama vrijednosti koje su postavljene u zadatku.. Verschaffel i De Corte(1997) navode da su tri vrste znanja važne u procesu stvaranja predodžbe: znanje o primjeni i svrsi školskih zadataka, lingvističko znanje i poznavanje shema problemskih situacija.

Znanje o primjeni i svrsi školskih zadataka odnosi se na poznavanje specifične vrste teksta koji je pojavljuje u zadacima i o školskom kontekstu u kojem se zadatak koristi. To uključuje znanje o (prema Vreschaffel i De Corte, 1997):

1. namjeri i svrsi problemskih zadataka u nastavi matematike
2. tipičnoj strukturi i riječima u školskim problemskim zadacima
3. implicitnim pravilima, pretpostavkama i dogovorima koje je potrebno znati pri rješavanju školskih problemskih zadataka riječima.

Druga vrsta znanja je lingvističko znanje. Prilično je samorazumljivo da je za uspješno rješavanje zadataka potrebno razumjeti riječi i sintagme iz zadataka. Ipak, događa se da učenici krivo interpretiraju neke riječi ili izraze u zadatku. Npr. da rečenicu «Trokut se povećao dva puta» učenik interpretira kao da se samo visina trokuta povećala dva puta, zanemarivši pritom da su se i ostale veličine trokuta povećale

Treća vrsta znanja je znanje koje uključuje poznavanje shema problemskih situacija. Te sheme predstavljaju unaprijed stvoreni set mogućih situacija koje se mogu pojaviti kod određene vrste zadataka. Npr. kod zadataka s proporcijama propitujemo da li se radi o proporcionalnom ili obrnuto proporcionalnom procesu, da li se radi o linearnom ili kvadratnom rastu i dr. Dakle, za uspješno rješavanje zadatka potrebno je uz određeni zadatak odabrati prikladnu shemu problemske situacije.

Sljedeći korak u procesu rješavanja zadataka je odabir aritmetičke operacije. Aritmetička operacija se bira na osnovi stvorene predodžbe o zadatku kako bi se odgovorilo na pitanje postavljeno u zadatku. Iako je moguće korištenje raznih neformalnih operacija, na najvišem stupnju razvijenosti vještine rješavanja koriste se formalne aritmetičke računske operacije. Naravno, kod jednostavnih matematičkih problema, povezivanje predodžbe s odgovarajućom računskom operacijom je relativno jednostavno, dok kod složenih matematičkih problema taj odabir postaje zahtjevniji za rješavača.

Fishbein (prema Nesher, 1992) navodi da se uspješni rješavači ne razlikuju od neuspješnih po tome što na njih ne utječu implicitni modeli, nego da uspješni rješavači vjerojatno imaju veću metakognitivnu svijest o prirodi i uzrocima pogrešnog mišljenja na koje medijacijski utječu primitivni modeli i veću kontrolu tih intuitivnih procesa mišljenja.

Pored ovakvog pristupa rješavanju problemskih zadataka, postoje i neformalne strategije koje mogu poslužiti u rješavanju problema. Primjer takve neformalne strategije vidi se i na slici 1. gdje je zadatak riješen tako da se grafički predočio voćnjak oblika kvadrata sa stranicom 200 metara i onda se prebroji koliko u njega stane kvadrata sa stranicom 50 metara.

Međutim, neformalne strategije, iako često korisne u rješavanju problema, često su neefikasne u računskom smislu, jer mogu onemogućiti fleksibilnu primjenu različitih matematičkih principa, što otežava izračunavanje rješenja (Verschaffel i De Corte, 1997). One nemaju mogućnost generalizacije na probleme s većim ili složenijim brojevima(npr. decimalnim brojevima). Primjerice, bilo bi teško riješiti zadatak koji je prikazan na slici 1. kada bi stranica velikog kvadrata bila 184.22 metra. Zbog ovih ograničenja, neformalne se strategije ne mogu smatrati konačnim ciljem podučavanja matematike, no one igraju važnu ulogu na početnim razinama procesa poučavanja u napredovanju ka formalnim strategijama. Pri tome osobitu važnost imaju pažljivo odabrani problemi, modeli, sheme i instrukcijske aktivnosti koje će kod učenika poticati razvoj matematičkog mišljenja (prema Verschaffel i De Corte, 1997).

Posljednji korak u rješavanju zadataka je verifikacija i interpretacija rješenja. Verifikacija se odnosi na aktivnosti kojima se nastoji utvrditi točnost rješenja koje je dobiveno u fazi izvođenja računske operacije, ali i stvaranja predodžbe o samom zadatku. Interpretacija se odnosi na razmatranje rješenja u kontekstu početne predodžbe o problemu. Faza verifikacije i interpretacije je korak koji je često zanemaren u procesu rješavanja problema (prema Verschaffel i De Corte, 1997). To se može objasniti, barem dijelom, zbog nelogične i artificijelne prirode zadataka, čime je u stvari onemogućena svrsishodna interpretacija rješenja. Pored toga, vremensko ograničenje rješavanja zadataka potiče učenike da riskiraju tako da ne verificiraju rješenje kako bi imali više vremena za rješavanje drugih zadataka. Naglasak na korištenje verifikacije i interpretacije rješenja postići će se samo ako učenici budu suočeni s raznolikim problemima i zadacima koji zahtijevaju primjenu verifikacije i interpretacije rješenja (Verschaffel i De Corte, 1997).

RAZVOJ PROPORCIONALNOSTI

Zadaci koji se bave proporcionalnošću predstavljaju važan dio matematičkog obrazovanja zbog svoje široke primjenjivosti u svakodnevnom životu. Primjere nalazimo u raznim financijskim obračunima, geografskim i fizikalnim pretvaranjima pa sve do kuhanja u kućanstvu. Glavna svrha matematičkog obrazovanja u području proporcionalnosti je naučiti učenike da svoje formalno matematičko znanje primjene u svakodnevnim situacijama iz «stvarnog života» (Verschaffel et al., 1999).

Razna istraživanja pokazala su da već vrlo mala djeca pokazuju prosuđivanje o gustoći i brzini(prema Nunes i Bryant, 1997). Kako je ta vrsta prosuđivanja, koju matematičkim rječnikom nazivamo prosuđivanje o omjerima, proporcijama i funkcijama, važna za suočavanje s fizičkom i socijalnom okolinom, razvija se kroz svakodnevne interakcije i kroz formalno matematičko obrazovanje. Singer, Kohn i Resnick (1997) su autorice razvojne teorije prema kojoj pretpostavljaju da se neposredni oblici razumijevanja proporcija pretvaraju u formalno matematičko znanje integriranjem tzv. protokvantitativnih shema i znanja brojanja.

Protokvantitativne sheme omogućuju rezoniranje o odnosima između različitih količina fizičkih tvari i uključuju kombinacije, povećavanje, smanjivanje i usporedbu količina. Pri takvom se rezoniranju govori o direktnoj usporedbi količina (ima više x od y), a ne spominje se kvantificiranje objekata usporedbe.

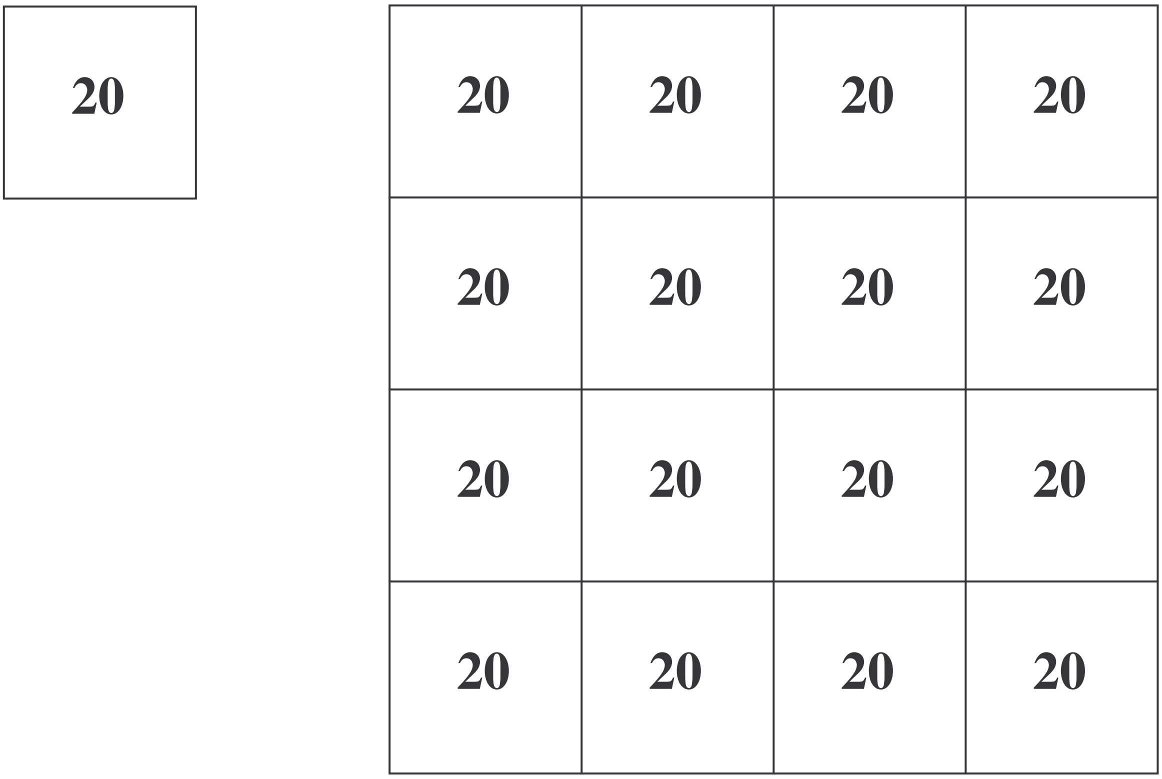
Kvantificiranje se počinje javljati u predškolskoj dobi. Kroz svakodnevnu upotrebu djeca počinju to znanje integrirati sa protokvantitativnim shemama i tada govorimo o kvantitativnim shemama. One omogućuju djeci donošenje brojčano točnih prosudbi o kombinacijama, promjenama i usporedbi fizikalnih objekata i skupova. Kasnije se rezoniranje koristi na samim brojevima i matematičkim operacijama, no zadržavaju se odnosi iz protokvantitativnih shema (npr. ima 5 x više od y).

Čini se kako muktiplikativno rezoniranje postaje dominantan pristup u proporcionalnom rezoniranju oko desete godine života (prema Singer, Kohn i Resnick, 1997). Da bi dijete napredovalo u proporcionalnom rezoniranju ono mora preći s aditivnog modela na multiplikativni kako bi moglo rješavati i one zadatke koji uključuju razlomke, decimalne brojeve i sl.

ILUZIJA LINEARNOSTI

Već mala djeca doživljavaju proporcionalnost: u jednu kanticu stanu dvije šake pijeska, dakle u dvije kantice stanu četiri šake pijeska; jedan autić ima četiri kotača, dakle dva imaju osam kotača itd. (prema Van Dooren et al., (2004). Tijekom osnovnog i srednjeg školovanja, učenici uče o proporcionalnosti u širokom rasponu primjene. Od mjerila u geografskim kartama, preko gustoća u fizici do geometrije u matematici. S obzirom na svoju primjenjivost i jednostavnost, direktni proporcionalni (ili linearni) model može predstavljati ozbiljnu zamku, jer se u nizu istraživanja pokazalo kako postoji tendencija da se taj model primjenjuje nekritički, čak i u situacijama kada nije primjeren (De Bock et al., 1998; Van Dooren, 2004 itd.). Pogreška u primjeni linearnog proporcionalnog modela (u literaturi nazvana i «iluzija linearnosti») izuzetno je snažna i može se vidjeti kod ispitanika različite dobi i u različitim matematičkim i drugim znanstvenim područjima. Jedan od najstarijih primjera je onaj o robu u Platonovom dijalogu Meno. Kada ga je Sokrat pitao da mu nacrta kvadrat koji će imati dvostruko veću površinu od onog kojeg je sam Sokrat nacrtao, rob mu je odgovorio da samo treba povećati dužinu stranica dva puta. Također je poznata Galileieva kritika Aristotelovih ideja o gravitaciji kada je Aristotel tvrdio da će objekt koji je deset puta teži padati deset puta brže (prema Van Dooren, 2004).

Iluzija linearnosti (ili proporcionalnosti) odnosi se na pogrešku koja se javlja kod rješavanja zadataka kada na osnovu povećanja neke dužine za faktor k, ljudi (pogrešno) smatraju da se površine i volumeni također povećavaju za faktor k. Ispravno rješavanje bilo bi takvo da na osnovu povećanja neke mjere dužine za faktor k dolazi do povećanja ostalih mjera dužine za faktor k, površina za faktor k^2, a volumena za faktor k^3. Npr. U zadatku «U voćnjaku koji je oblika kvadrata kojemu je dužina stranice 50 metara može rasti 20 stabala jabuka. Koliko stabala može rasti u voćnjaku oblika kvadrata kojemu je stranica dugačka 200 metara?», rješenje bi bilo da vidimo da dolazi do promjene duljine stranice za faktor 4. Prema tome dolazi do promjene površine za faktor 16 što znači da bi broj stabala trebao iznositi 320. Zbog iluzije linearnosti, rješavači će imati tendenciju smatrati da i kod površine dolazi do promjene za faktor 4 pa će njihovo rješenje iznositi 80 stabala. Grafički prikaz rješenja nalazi se na slici 1.



Slika 1. Grafičko rješenje zadatka s voćnjakom.

O ovoj temi u posljednjih je deset godina rađen niz istraživanja koja su ispitivala snagu ove iluzije. Rezultati ovih istraživanja dali su sljedeće rezultate (De Bock et al., 1998,2002b; Van Dooren, 2004):

- Velika većina učenika pogrešno rješava ne-linearne zadatke zbog snažne tendencije da primjenjuju linearni model
- Čak i kada im se pruži znatna podrška (npr. crteži, metakognitivni podražaji i drugo), samo malen broj učenika počeo je koristiti ispravne, ne-linearne modele
- Kada su, zbog pružene pomoći, učenici otkrili da su neki problemi u testu ne-linearni, ponekad su i linearne probleme rješavali na ne-linearan način.

U studiji koju je proveo De Bock (De Bock et al., 2002a), on i suradnici koristili su intervjue kako bi istražili procese rješavanja ovih problema i mehanizme koji se nalaze u podlozi rezultata testova papir-olovka. Glavni rezultati te studije su da:

- Većina učenika koristila je proporcionalne modele na spontan, gotovo intuitivan način i nisu bili svjesni vlastitog odabira modela., drugi su bili uvjereni da se linearni modeli uvijek primjenjuju pa su stoga namjerno odabirali linearne modele.
- Mnogo učenika pokazalo je neznanje iz područja geometrije (npr. vjerovali su da samo pravilni geometrijski likovi imaju površinu)

- Mnogo učenika nije imalo dobro razvijene stavove i vjerovanja prema rješavanju problema u (školskoj) matematici (npr. vjerovanje da crteži ne pomažu u rješavanju problema), što dovodi do površne primjene matematičkih modela.

U dosadašnjim istraživanjima iluzija linearnosti se ispitivala uglavnom zadacima otvorenog tipa, tj. bez ponuđenih rješenja. Temeljna ideja bila je da se različitim postupcima kod ispitanika izazove provjeravanje rješenja. De Bock i sur. (2002a) i Zekić (2002) koristili su metodologiju prema kojoj su ispitanici u prvoj fazi rješavanja dobili ponuđene zadatke. Ako bi zadatak riješili netočno u sljedećim fazama bi se kod ispitanika izazivala postupno sve jača disonanca kako bi ispitanici (re)evaluirali svoje rješenje. Koristili su se grafički prikazi, objašnjenja izmišljenih kolega zašto rješavaju zadatke ne-linearno i drugo. Osim ovakvim postupcima, verifikaciju rješenja moguće je potaknuti tako da se ispitanicima unaprijed ponude odgovori. Ti odgovori onda služe kao referentni okvir za provjeru rješenja. Ako se iz ponuđenih odgovora izbaci ono rješenje koje odgovara iluziji linearnosti, izazvat će se disonanca zbog koje će ispitanici morati preispitati linearan postupak rješavanja, a zatim i linearnu predodžbu problema. Ovakvim postupkom može se ispitati da li će zbog te disonance učenici uspjeti stvoriti ispravnu predodžbu o problemu i ispravno riješiti zadatak ili je iluzija linearnosti toliko jaka da će kada budu suočeni s disonancom, učenici odbaciti ponuđena rješenja kao referentni okvir i ustrajati pri svom rješenju. Naravno, moguće je da učenici pokušaju promijeniti svoju predodžbu o problemu, ali ne uspiju stvoriti ispravnu predodžbu.

2. PROBLEMI I HIPOTEZE:

1. **Ispitati razliku u uspješnosti rješavanja linearnih i ne-linearnih zadataka između skupine koja među rješenjima ima ponuđeno linearno rješenje u ne-linearnim zadacima (skupine A) i skupine koja nema ponuđeno linearno rješenje u ne-linearnim zadacima (skupina B) .**

H2: Na osnovi prethodnih istraživanja pretpostavljamo da kod linearnih zadataka neće biti razlike u uspješnosti rješavanja između skupine A i skupine B. Također pretpostavljamo da će se, kao posljedica ukidanja mogućnosti primjene linearnog modela skupini B, pojaviti razlika u uspješnosti rješavanja ne-linearnih zadataka, pri čemu će ispitanici iz skupine B biti bolji rješavači.

2. **Ispitati postoje li razlike u uspješnosti rješavanja zadataka između djevojaka i mladića.**

H3: Kako u literaturi nisu rađene usporedbe između mladića i djevojaka, da bismo odgovorili na ovaj problem poslužit ćemo se nul-hipotezom, što znači da pretpostavljamo da neće postojati statistički značajna razlika u uspješnosti rješavanja zadataka.

3. **Ispitati postoje li razlike u uspješnosti rješavanja linearnih i ne-linearnih zadataka s obzirom na dob ispitanika.**

H4: S obzirom na rezultate prethodnih istraživanja (vidi De Bock et al., 1998, 2002b) pretpostavljamo da će stariji ispitanici uspješnije rješavati ne-linearne zadatke od mlađih.

3. PRIBOR

Za potrebe ovog istraživanja konstruirane su tri forme lista sa zadacima.

Forma A sadržavala je pet zadataka koji su podložni iluziji linearnosti i na svaki je zadatak bilo ponuđeno pet rješenja. Među tih pet rješenja jedno se može dobiti ako je ispitanik podložan iluziji linearnosti, jedno je točno rješenje, dok su preostala rješenja služe kako bi se smanjila vjerojatnost pogađanja.

Forma B identična je po zadacima formi A. Razlika je u ponuđenim rješenjima i to tako da u formi B nije ponuđeno ono rješenje koje bi se dobilo ako je ispitanik podložan iluziji linearnosti. Dakle u formi B postoji samo točno rješenje i četiri rješenja, kako bi se smanjila vjerojatnost pogađanja.

Forma C bila je također sastavljena od pet zadataka. Zadaci u formi C bili su klasični zadaci proporcionalnosti kod kojih se ne radi o povećavanju površina ili volumena, već samo o linearnom rastu. Na svaki zadatak bilo je ponuđeno pet rješenja, od kojih je jedno bilo točno, a ostala su služila kako bi se smanjila vjerojatnost pogađanja. Važno je napomenuti da su distraktorska rješenja u sve tri forme birana tako da se ne mogu dobiti jednostavnim linearnim kombinacijama niti jednostavnim množenjem ili dijeljenjem brojeva u zadatku.

Konačan izgled upitnika je takav da su pričvršćene zajedno forma C i forma A ili B, svaka na zasebnom listu papira. Otprilike polovica upitnika spojena je tako da je na prvom listu forma C, a na drugom forma A ili B (tzv. oblik CX), dok je na drugoj polovici na prvom listu forma A ili B, a na drugom forma C (tzv. oblik XC)

4. ISPITANICI

U ovom istraživanju korišten je prigodan uzorak ispitanika iz jedne zagrebačke gimnazije općeg smjera. U uzorku je bilo sveukupno 112 ispitanika. Kako bi se moglo odgovoriti na probleme, u istraživanju su sudjelovali ispitanici iz dva prva razreda i dva četvrta razreda, pri čemu se vodilo računa o tome da ispitanicima u prvim razredima predaje isti profesor matematike, jednako kao i za četvrte razrede. Potpuna raspodjela ispitanika po varijablama koje se koriste u istraživanju nalazi se u tablici 1.

Tablica 1. Prikaz raspodjele ispitanika prema dobi, spolu i pripadnosti skupini A ili B (N=112)

		A	**B**	**Σ**
Prvi razred	Muški	16	8	24
	Ženski	10	18	28
Četvrti razred	Muški	18	17	35
	Ženski	12	13	25
	Σ	56	56	112

5. POSTUPAK

Testiranje je provedeno tijekom veljače 2006. godine. Ispitivanje je provedeno skupno, sa svakim razredom zasebno. Razredi su po slučaju podijeljeni na to pripadaju li skupini A, odnosno B, po načelu da od dva prva razreda jedan predstavlja skupinu A, a drugi skupinu B. Isto je vrijedilo za četvrte razrede. Sva testiranja provedena su u prostorijama gimnazije koju su pohađali ispitanici.

Raspodjela oblika CX i XC provedena je tako da, s obzirom da ispitanici sjede po dvoje u klupi, jedan ispitanik u klupi rješava oblik XC, a drugi CX.

Vrijeme rješavanja nije bilo ograničeno, a rješavanje je trajalo za skupinu A približno 25 minuta, a za skupinu B približno 35 minuta.

Kako bi se smanjila mogućnost pogađanja, od ispitanika je traženo da uz zaokruživanje onog odgovora za koji smatraju da je točan, također napišu i postupak ili obrazloženje kako su došli do tog odgovora.

Svim ispitanicima dana je ista uputa: «Pred vama se nalaze dva lista sa po pet zadataka iz područja proporcija. Molim vas da prije rješavanja na prvom listu upišete kojeg ste spola. Prvo rješavajte zadatke na prvom listu, a nakon toga rješavajte zadatke na drugom listu. Obavezno uz zaokruženo rješenje napišite i postupak kako ste došli do tog rješenja. Postupak ne mora biti napisan u obliku računskih operacija, već može biti i grafički prikaz ili verbalno objašnjenje.»

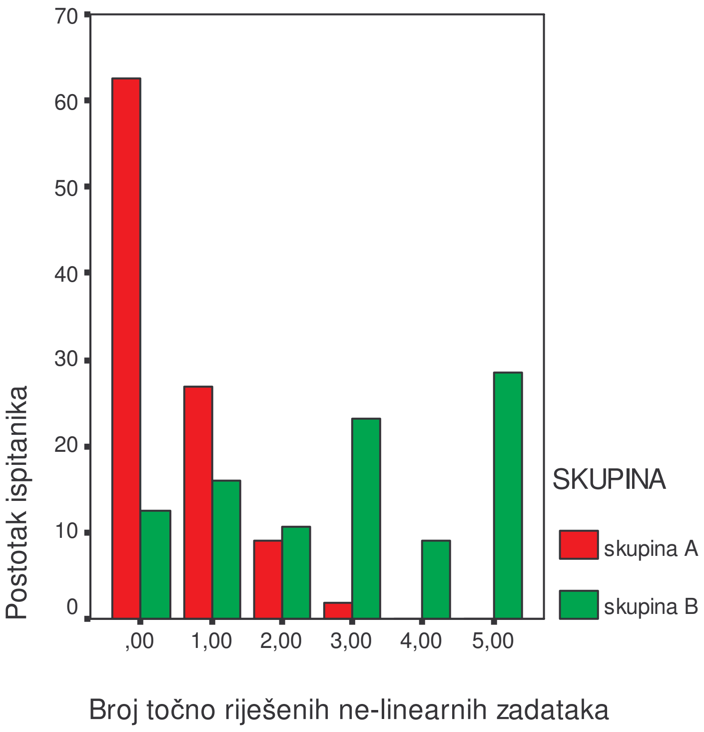
4. OBRADA REZULTATA

Nakon testiranja pristupilo se korigiranju lista sa zadacima. Točan odgovor je priznat samo ako je uz točan odgovor stajao prihvatljivo matematičko, grafičko ili verbalno objašnjenje. Smirnov – Kolmogorovljevim testom testiran je normalitet distribucija i dobiveno je da sve distribucije značajno odstupaju od normalne distribucije. Zbog toga nije opravdano korištenje parametrijskih statističkih metoda. Da bi se odgovorilo na probleme rezultati su obrađeni metodom χ^2 testa.

S obzirom da je kod linearnih zadataka od 112 ispitanika 111 riješilo točno svih 5 zadataka, a jedan ispitanik je riješio točno 4 zadatka, nema razlike u rješavanju linearnih zadataka s obzirom na spol, dob i pripadnost skupini A ili B.

ISPITIVANJE RAZLIKE U RJEŠAVANJU NE-LINEARNIH ZADATAKA IZMEĐU SKUPINE A I SKUPINE B

Prvu hipotezu u ovom radu provjerili smo ispitivanjem razlike između skupine A, koja je među ponuđenim rješenjima imala ono koje odgovara iluziji linearnosti, i skupine B, koja među ponuđenim rješenjima nije imala linearno rješenje. Analiza je provedena χ^2 testom i pokazalo se da postoji statistički značajna razlika između ove dvije skupine (χ^2 = 51.543; df = 5; $p < 0.001$). Prikaz uspješnosti rješavanja zadataka ove dvije skupine nalazi se na slici 2.



Slika 2. Prikaz postotka ispitanika prema broju točno riješenih zadataka u formi A i formi B (N=112)*

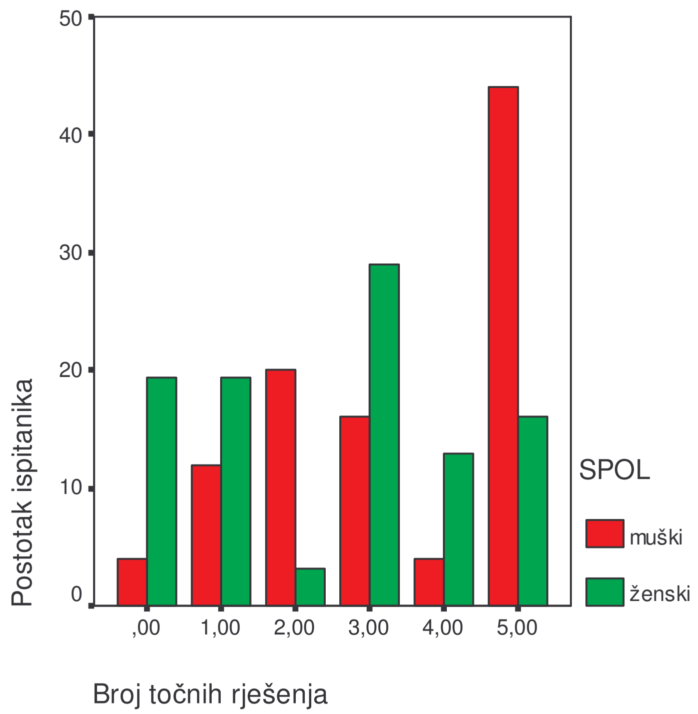
Prema prikazu, vidi se kako ispitanici u skupini B ne-linearne zadatke rješavaju značajno bolje od ispitanika u skupini A.

---

* Prikazi frekvencija, dominantne vrijednosti i srednjeg odstupanja nalaze se u prilogu 1.

ISPITIVANJE RAZLIKE MEĐU SPOLOVIMA

S obzirom da forma A i forma B predstavljaju različite podražajne materijale i da postoji statistički značajna razlika u uspješnosti rješavanja među ispitanicima koji pripadaju skupini A, odnosno skupini B, rezultati s obzirom na spol ispitanika su zasebno obrađivani za svaku skupinu. Za skupinu A nije pronađena razlika među spolovima pri rješavanju ne-linearnih zadataka ($\chi^2 = 1.617$; df = 3; p = 0.656), dok je za skupinu B pronađena razlika ($\chi^2 = 12.714$; df = 5; p = 0.026). Prikaz postotka ispitanika prema broju točnih rezultata za skupinu B prema varijabli spol nalazi se na slici 3.



Slika 3. Prikaz postotka ispitanika prema broju točno riješenih zadataka u formi B prema spolu (N=56)

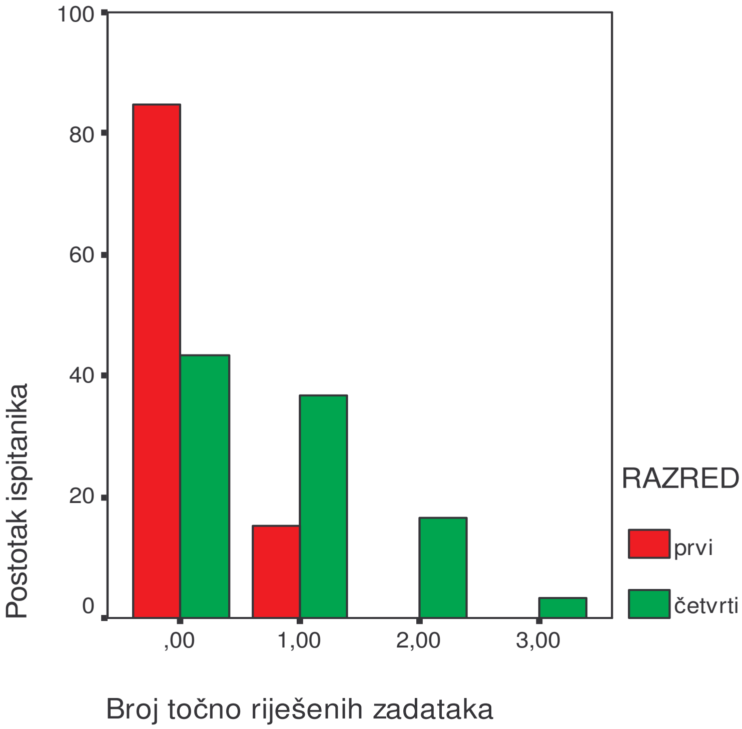
Prema provedenoj analizi pokazalo se da mladići u skupini B rješavaju zadatke statistički značajno bolje od djevojaka iz iste skupine.

ISPITIVANJE RAZLIKE S OBZIROM NA DOB

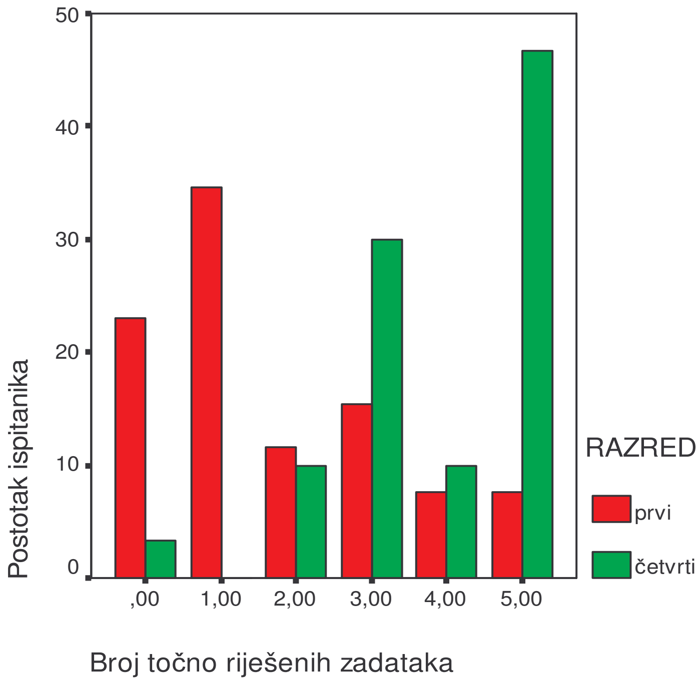
Ispitivanje razlike s obzirom na dob provedeno je također samo na ne-linearnim zadacima. Iz istog razloga kao i pri ispitivanju razlika s obzirom na spol i ovdje su skupine A i

B zasebno analizirane. Razlike prema dobi pronađene su i kod skupine A (χ^2 = 11.353; df = 3; p = 0.010) i kod skupine B (χ^2 = 23.529; df = 5; p < 0.001).

Prikaz postotka ispitanika prema broju točno riješenih zadataka, a po varijabli dobi, nalazi se na slikama 4. i 5.



Slika 4. Prikaz postotka ispitanika prema broju točno riješenih zadataka u formi A prema dobi (N=56)



Slika 5. Prikaz postotka ispitanika prema broju točno riješenih zadataka u formi B prema dobi (N=56)

Iz prikaza na slici 4. je vidljivo da u prvom razredu u skupini A nitko nije riješio više od 1 zadatka. Dok je u četvrtom razredu bilo učenika koji su uspjeli riješiti do tri točna zadatka. Iz prikaza na slici 5. jasno se vidi kako su i u skupini B učenici četvrtog razreda bolje rješavali zadatke od učenika u prvom razredu.

5. RASPRAVA

ISPITIVANJE RAZLIKE IZMEĐU SKUPINE A I SKUPINE B

U ovom su radu formirane dvije forme upitnika sa ne-linearnim zadacima. U formi A bilo je uz svaki zadatak ponuđeno pet rješenja. Jedno rješenje bilo je ono koje se dobiva ako je ispitanik rješavao zadatak prema iluziji linearnosti, jedno je bilo ono koje je ispitanik dobio ako je ispravno rješavao zadatak i preostala tri ponuđena rješenja su služila kako bi se smanjila mogućnost pogađanja. U formi B bilo je također pet ponuđenih rješenja. Ona su bila identična onima u formi A, s razlikom da u formi B nije bilo rješenja koje bi odgovaralo iluziji linearnosti, već je to rješenje zamijenjeno distraktorskim rješenjem. Formu A rješavala je skupina A, a formu B skupina B.

Na ovaj smo način željeli kod ispitanika u skupini B izazvati konflikt jer smo im ukinuli mogućnost primjene linearnog modela. Pretpostavili smo da će ispitanici zbog ukidanja linearnog modela preispitati linearnu predodžbu i stvoriti novu, ispravnu, predodžbu o zadatku i na taj način uspješno riješiti zadatke.

Kod forme C, odnosno linearnih zadataka, koje su rješavale obje grupe nije pronađena razlika u uspješnosti rješavanja.

Redoslijed rješavanja linearnih i ne-linearnih zadataka kontroliran je zbog mogućeg sustavnog utjecaja na rezultate. Kako bismo provjerili postojanje takvog utjecaja kreirali smo dva oblika upitnika. Prvo oblik, kojeg smo nazvali «oblik CX» bio je takav da su ispitanici prvo rješavali linearne zadatke, a tek onda ne-linearne. Za oblik XC vrijedilo je da ispitanici prvo rješavaju ne-linearne zadatke, a nakon njih linearne. Provedene analize pokazale su da ne postoji efekt redoslijeda rješavanja niti u skupini A (χ^2 = 4.495; df = 3; p=0.213), niti u skupini B (χ^2 = 6.037; df = 5; p=0.303), što je sukladno rezultatima koje je dobila Zekić (2002).

Prikaz postotka ispitanika prema broju točno riješenih ne-linearnih zadataka nalazi se na slici 2. Provedena analiza pokazala je kako postoji značajna razlika među skupinama u uspješnosti rješavanja ne-linearnih zadataka ($\chi^2 = 51.543$; df = 5; $p < 0.001$). Pokazalo se kako ispitanici u skupini B značajno bolje rješavaju ne-linearne zadatke od ispitanika u skupini A. Tu razliku možemo najbolje uočiti u broju ispitanika koji nisu riješili niti jedan zadatak točno. Takvih ispitanika u skupini A ima 62.5%, a u skupini B 12.5%. S druge strane niti jedan ispitanik iz skupine A nije točno riješio više od tri ne-linearna zadatka, dok je u skupini B četiri ili pet točno riješenih zadataka imalo 37.5% ispitanika. Iako taj rezultat ne iznenađuje, važno je napomenuti da su gotovo sva netočna rješenja u skupini A zapravo bila linearna rješenja zadataka[*]

Možemo pretpostaviti kako ukidanje mogućnosti primjene linearnog modela za rješavanje zadataka doista potiče ispitanike da iskoriste ne-linearni model. Na ovaj smo način spriječili učenike da zadatke rješavaju rutinski i bez razmišljanja i provjeravanja predodžbe o zadatku. Verschaffel i De Corte (1997) govore da klasični matematički zadaci iz područja proporcionalnosti ne potiču učenike na upoznavanje matematičkih koncepata. Rezultati skupine B ukazuju nam na to ta učenici većinom imaju potrebna znanja za rješavanje ne-linearnih proporcionalnih modela. Ipak, kako standardni školski zadaci riječima obuhvaćaju relativno ograničen skup problema i stereotipni su, učenici relativno brzo stvore ograničen set shema za tipove zadataka s kojima se susreću. Primjena tih shema im omogućuje brže rješavanje problema i iz tog ih razloga oni koriste. Na žalost, zadaci s kojima se učenici susreću vrlo rijetko dovode u pitanje ispravnost tih shema. Iako su neki ispitanici u skupini B na ne-linearnim zadacima primijenili linearni model i onda tvrdili kako među ponuđenim odgovorima nema točnog rješenja, ipak je većina ispitanika iz te skupine odlučila posumnjati u ispravnost linearnih predodžbi.

Ovakvi nam rezultati govore da treba preispitati modele koje učenici usvajaju tijekom obrazovanja, s obzirom da su istraživanja pokazala (npr. De Bock i sur.; 2002b; Van Dooren et al, 2003) kako se neki aspekti ove iluzije pojavljuju i u područjima trigonometrije, vjerojatnosti, kombinatorike i dr. Ispitanici su u ovom istraživanju gotovo besprijekorno riješili linearne zadatke. U uvodu je navedeno kako djeca od deset godina mogu razumjeti multiplikativne odnose među brojevima i proporcionalnost. Do srednje škole učenici razvijaju kvantificirano rezoniranje o omjerima i proporcijama. Osim toga, učenici u sedmom razredu

---

[*] Svega dva ispitanika imaju, svaki po jedno, netočno rješenje koje nije linearno. Jedan ispitanik je pogrešno shvatio zadatak, a drugi ispitanik, kada se tražilo da odredi cijenu pizze, nije računao sa zadanim vrijednostima već je dao onaj odgovor koji je bio najbliži stvarnoj cijeni pizze u pizzerijama.

osnovne škole uče o proporcijama u okviru nastave matematike (Đurović i Đurović, 1998; Gusić, Gusić i Mrkonjić, 2001). Osim što je znanje iz područja proporcionalnosti uvjet da bi učenici završili osnovnu školu, tijekom obrazovanja oni stječu iskustvo s zadacima iz područja proporcionalnosti. Iz ovih razloga učenici uspješno rješavaju linearne proporcionalne zadatke.

Ne-linearni zadaci koji su korišteni, izrađeni su po uzoru na zadatke korištene u ranijim istraživanjima (npr. De Bock i sur., 2002b; Zekić, 2002). Najvjerojatnije objašnjenje zašto učenici lošije rješavaju ne-linearne zadatke je da učenici imaju problema s razumijevanjem problemske situacije i ne provjeravaju točnost predodžbe i rješenja. De Bock i suradnici (2002b) navode da se dječje netočno linearno rezoniranje može objasniti teorijom intuitivnih pravila Stavyeve i Tirosheve. Prema ovoj teoriji, na rješavanje matematičkih problema utječu uobičajena i intuitivna pravila. Intuitivna pravila su očita, ne zahtijevaju provjeru i vrlo su perzistentna, a osoba je vrlo sigurna u njihovu točnost. Postoje dvije sheme koje vrlo često djeluju na intuitivan način : «isto A – isto B» (iako je moguće i da ako je $A_1 = A_2$, bude $B_1 \neq B_2$; npr. imaju li dva lika s istim opsegom nužno i istu površinu?), i druga shema nazvana «više A – više B» (iako je moguće da ako je $A_1 < A_2$, bude B_1 ? B_2; npr. da li lik sa većim opsegom nužno ima i veću površinu?) Kod ne-linearnih zadataka učenici prvo primjenjuju pravilo «više A – više B» i u ovom slučaju ispravno zaključuju da npr. ako se povećava dužina stranice, povećava se i površina lika, a zatim upotrijebe pravilo «isto A – isto B» i zaključe da ako se promjer smanji dva puta da se i površina smanji za dva puta. Pogreške se javljaju upravo kad učenici primjene ovo pravilo. Jer bi trebalo zaključiti da ako se promjer smanji dva puta, površina će se smanjiti četiri (2^2) puta.

Ipak, prema rezultatima ovog istraživanja pokazalo se kako kada su ispitanici prisiljeni verificirati rješenje i preispitati predodžbu o problemu, oni mogu uspješno rješavati ne-linearne probleme. Verschaffel i De Corte (1997) predlažu da se u obrazovanju i istraživanjima primjenjuju složeni, slabo strukturirani problemi iz primijenjene matematike u realističnijem izvanškolskom kontekstu, kako bi učenici, osim temeljitijeg upoznavanja matematičkih koncepata, svoje znanje mogli primjenjivati u autentičnim i složenim situacijama rješavanja problema izvan škole. Na ovaj će način učenici imati priliku provjeriti svoja rješenja u realističnijem kontekstu i na taj način kvalitetnije usavršavati svoje znanje.

UTJECAJ SPOLA NA USPJEŠNOST RJEŠAVANJA ZADATAKA

Pitanje koje smo postavili našim drugim problemom bilo je postoji li utjecaj spola na uspješnost rješavanja zadataka u istraživanju. Analize su pokazale kako kod linearnih zadataka ne postoji razlika između djevojaka i mladića. Kako je za skupinu A i za skupinu B postojao različiti podražajni materijal, analize uspješnosti rješavanja ne-linearnih zadataka su za svaku skupinu rađene posebno. U skupini A, koju je sačinjavalo 34 mladića i 22 djevojke nije pronađena statistički značajna razlika ($\chi^2 = 1.617$; df = 3; p = 0.656), dok je u skupini B, koju je sačinjavalo 25 mladića i 31 djevojka, razlika pronađena ($\chi^2 = 12.714$; df = 5; p = 0.026). Prikaz postotka ispitanika iz skupine B prema uspješnosti rješavanja za varijablu spola nalazi se na slici 2. U skupini B pokazalo se kako mladići značajno bolje rješavaju zadatke od djevojaka. Od svih mladića u skupini B, 96% je riješilo barem jedan zadatak, dok je od svih djevojaka u skupini, barem jedan zadatak riješilo njih 80.6%. Najveća razlika pokazala se u broju učenika koji su riješili svih pet ne-linearnih zadataka. Među mladićima, takvih je 44%, dok kod djevojaka taj postotak iznosi 16.1%.

Možemo pretpostaviti kako je kod linearnih zadataka vještina rješavanja izražena do te mjere da ih ispitanici rješavaju gotovo bez greške. Jednako tako možemo pretpostaviti da je iluzija linearnosti toliko izražena da se mladići i djevojke statistički značajno ne razlikuju međusobno. Ipak, kada se u ne-linearnim zadacima onemogući rješavanje prema iluziji linearnosti, čini se kako mladići u većoj mjeri stvaraju odgovarajuće sheme zadataka. Djelomično ovaj rezultat možemo objasniti time da, statistički gledano, muškarci postižu nešto bolje rezultatima na testovima koji ispituju spacijalnu inteligenciju (prema Colman, 2001). S obzirom da se kod svih ne-linearnih zadataka radi o uspoređivanju likova, moguće je da je bolji rezultat mladića, bar djelomično posljedica boljeg spacijalnog rezoniranja. S druge strane, u obzir trebamo uzeti i osobitosti uzorka, ponajprije u smislu reprezentativnosti, jer bismo većim brojem ispitanika smanjili pogrešku mjerenja, odnosno imali bolji uvid u to je li ta razlika doista statistički značajna.

UTJECAJ DOBI NA USPJEŠNOST RJEŠAVANJA ZADATAKA

Analiza koja je provedena kako bi se provjerio utjecaj dobi na uspješnost rješavanja zadataka pokazala je kako u linearnim zadacima ne postoji razlika među ispitanicima različite dobi. Vještina rješavanja linearnih zadataka već je u prvom razredu gimnazije toliko razvijena da učenici nisu radili pogreške.

Kod analiza uspješnosti rješavanja ne-linearnih zadataka, rezultati pokazuju kako postoje značajne razlike i za skupinu A (χ^2 = 11.353; df = 3; p = 0.010) i za skupinu B (χ^2 = 23.529; df = 5; p < 0.001). Prikazi postotaka ispitanika prema broju točno riješenih zadataka nalaze se, za skupinu A, na slici 3, a za skupinu B na slici 4. Rezultati pokazuju kako stariji ispitanici u obje skupine značajno bolje rješavaju zadatke od mlađih ispitanika.

Kod skupine A možemo uočiti kako u prvom razredu čak 84.6% ispitanika nije riješilo niti jedan zadatak točno, dok taj postotak kod ispitanika iz četvrtog razreda iznosi 43.3%. Povrh toga, u prvom razredu niti jedan ispitanik nije riješio više od jednog zadatka točno.

U skupini B ta se razlika najbolje vidi u postotku ispitanika koji su točno riješili svih pet zadataka. Takvih je u prvom razredu bilo 7.7%, dok ih je u četvrtom razredu bilo 46.7%. S druge strane u prvom razredu je 57.7% ispitanika riješilo samo jedan ili nijedan zadatak točno, dok takvih ispitanika u četvrtom razredu ima tek 3.3%.

Ovi nam rezultati jasno ukazuju na efekt dobi. Ovakve su rezultate dobili i De Bock i sur. (1998) u svom istraživanju. Oni su uspoređivali učenike starosti 12-13 godina sa učenicima starosti 15-16 godina i pokazalo se kako stariji ispitanici uspješnije rješavaju ne-linearne zadatke. Pretpostavljamo da do ovog efekta dolazi djelomično zbog toga što su stariji ispitanici kognitivno zreliji, imaju više iskustva u rješavanju različitih matematičkih zadataka i imaju više znanja iz različitih područja matematike. Pretpostavljamo da, barem dijelom, zbog navedenih prednosti, stariji ispitanici uspješnije kreiraju ispravne sheme zadataka.

Također treba obratiti pažnju da je ova razlika izraženija u skupini B. Ovakav nam rezultat ukazuje na dvije pretpostavke: s jedne strane moguće je da nepostojanje rješenja koje bi odgovaralo iluziji linearnosti predstavlja jači poticaj starijim ispitanicima da preispitaju prvobitne sheme zadataka i onda stvore odgovarajuće sheme, ili s druge strane, da mlađi ispitanici imaju slabiji kapacitet za stvaranje odgovarajućih shema. Iz rezultata skupine A vidi se kako mlađi ispitanici doista u većoj mjeri podliježu iluziji linearnosti. Također vidi se i kako postoji veća razlika u uspješnosti rješavanja među dvjema dobnim skupinama kada ispitanicima damo poticaj za preispitivanje shema tako da im ne ponudimo rješenja koja odgovaraju iluziji linearnosti. Iz ova dva nalaza možemo zaključiti da su za veću razliku kod skupine B vjerojatno odgovorne i podložnost iluziji linearnosti i vrijednost korištene intervencije kao poticaja.

6. ZAKLJUČAK

U ovom istraživanju ispitivali su se neki aspekti iluzije linearnosti. Pokazalo se kako su učenici kojima je u ponuđenim odgovorima bila ukinuta mogućnost linearnog rješenja ne-linearnih zadataka značajno bolje rješavali ne-linearne zadatke od učenika koji su imali ponuđeno linearno rješenje. Ovakvi nam rezultati govore da se adekvatnom verifikacijom rješavanja zadataka može donekle suzbiti utjecaj iluzije linearnosti. Možemo ponoviti preporuku Verschaffela i De Cortea (1997) koji kažu kako bi se u obrazovanju i istraživanjima trebali primjenjivati složeni, slabo strukturirani problemi iz primijenjene matematike u realističnijem izvanškolskom kontekstu, kako bi učenici, osim temeljitijeg upoznavanja matematičkih koncepata, svoje znanje mogli primjenjivati u autentičnim i složenim situacijama rješavanja problema izvan škole.

Također se pokazalo kako su mladići u skupini koja nije imala ponuđeno linearno rješenje nešto uspješniji u rješavanju ne-linearnih problema od djevojaka iz iste skupine. Iako smo pretpostavili da je ova razlika posljedica toga da muškarci u prosjeku imaju nešto bolju spacijalnu inteligenciju, postojanje ovakve razlike otvara prostor za nova istraživanja koja će se baviti iluzijom linearnosti s obzirom na spol.

U skladu s očekivanjima pokazalo se da stariji ispitanici ne-linearne zadatke bolje rješavaju od mlađih ispitanika. Iako to pokazuje da izraženost iluzije linearnosti slabi s dobi, u svakom slučaju ta iluzija perzistira kod učenika koji su pri kraju srednjoškolskog programa.

Zaključno možemo reći da je iluzija linearnosti primjer fenomena koji pokazuje da se treba preispitati način obrazovanja u području rješavanja zadataka riječima. Dobiveni rezultati pokazuju nam kako su učenici naviknuti na ograničen i stereotipan set zadataka i da su neskloni baviti se verifikacijom rješenja i predodžbe o zadatku. S druge strane, u ovom se istraživanju pokazalo da se proces verificiranja može potaknuti i da učenici tada značajno bolje rješavaju zadatke. Matematičko obrazovanje koje za cilj ima naučiti učenike da pri rješavanju problema analiziraju i prolaze kroz sve faze rješavanja problema, od stvaranja predodžbe o problemu, do interpretacije i verifikacije rješenja, omogućit će učenicima da steknu kvalitetnije znanje koje će moći lakše i uspješnije primjenjivati u svim područjima života.

7. REFERENCE

1. Colman, A.M. (2001) Dictionary of Psychology; Oxford; Oxford University Press; p. 441
2. De Bock , D., Verschaffel, L., Janssens, D.(1998) The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. Educational Studies in Mathematics, vol. 35, p. 65-83
3. De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. I Verschaffel, L.(2002a) Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. Educational Studies in Mathematics, vol. 50, p 311-334
4. De Bock, D., Verschaffel, L., Janssens, D.,(2002b) The Effects of Different Problem Presentations and Formulations on the Illusion of Linearity in Secondary School Students. Mathematical Thinking & Learning, Vol. 4.
5. Đurović J., Đurović, I. (1998) Matematika 7 – udžbenik za 7. razred osnovne škole. Zagreb, Školska knjiga
6. Greer, B. (1987) Understanding of arithmetical operations as models of situations. U Sloboda i Rogers (Ur.), Cognitive processes in mathematics, London, Clarendon Press.
7. Gusić, I., Gusić, J. Mrkonjić, I. (2001) Matematika 7 – udžbenik za 7. razred osnovne škole, Zagreb, Školska knjiga
8. Nesher, P. (1992) Solving multiplication word problems. U Leinhardt, Rutnam I Haltrup (Ur.), Analysis of arithmetics for mathematics teaching, Hillsdale, N.T.:Erlbaum.
9. Nunes, T., Bryant, P. (1987) Learning and teaching mathematics: an international perspective, Hove, UK, Psychology Press Ltd.
10. Singer, J.A., Kohn, A.S., Resnick, L.B. (1997) Knowing about proportions in different contexts. U Nunes I Bryant (Ur.), Learning and teaching mathematics: an internationap perspective, Hove, UK, Psychology Press Ltd.
11. Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D., Verschaffel, L.(2004) The illusion of lineartiy: Expanding the evidence towards probabilistic reasoning. Educational Studies in Mathematics, vol 53., p.113-138.
12. Verschaffel, L., De Corte, E.(1997) Word problems: A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solvingin the primary school?. U Nunes i

Bryant (Ur.) Learning and teaching mathematics: an international perspective, Hove, UK, Psychology Press Ltd.

13. Verschaffel, L. De corte, E. i Vierstraete, H. (1999) Upper elementary school pupils' difficulties in modeling and solving nonstandard additive word problemsinvolving ordinal numbers. Journal for research in Mathematics Education, vol. 30(3), p. 265-285.
14. Zekić, I. (2002) Dječje rješavanje zadataka proporcionalnosti: linearno i ne-linearno rezoniranje. Diplomski rad. Sveučilište u Zagrebu. Filozofski fakultet. Odsjek za psihologiju.

6. PRILOZI

PRILOG 1. REZULTATI DESKRIPTIVNIH ANALIZA

Tablica 2. Prikaz frekvencija točnih rješenja, dominantne vrijednosti i srednjeg odstupanja za skupinu A (N=56) i skupinu B (N=56)

	BROJ TOČNIH RJEŠENJA						D*	s. o.**
	0	1	2	3	4	5		
Skupina A	35	15	5	1	0	0	0	0.5
Skupina B	7	9	6	13	5	16	5	2.14

Tablica 3. Prikaz frekvencija točnih rješenja, dominantne vrijednosti i srednjeg odstupanja u skupini A za mladiće (N=34) i djevojke (N=22)

	BROJ TOČNIH RJEŠENJA						D	s. o.
	0	1	2	3	4	5		
Mladići	20	9	4	1	0	0	0	0.588
Djevojke	15	6	1	0	0	0	0	0.364

Tablica 4. Prikaz frekvencija točnih rješenja, dominantne vrijednosti i srednjeg odstupanja u skupini B za mladiće (N=25) i djevojke (N=31)

	BROJ TOČNIH RJEŠENJA						D	s. o.
	0	1	2	3	4	5		
Mladići	1	3	5	4	1	11	5	1.64
Djevojke	6	6	1	9	4	5	3	1.452

Tablica 5. Prikaz frekvencija točnih rješenja, dominantne vrijednosti i srednjeg odstupanja u skupini A za prvi (N=26) i četvrti razred (N=30)

	BROJ TOČNIH RJEŠENJA						D	s. o.
	0	1	2	3	4	5		
Prvi razred	22	4	0	0	0	0	0	0.154
Četvrti razred	13	11	5	1	0	0	0	0.8

Tablica 6. Prikaz frekvencija točnih rješenja, dominantne vrijednosti i srednjeg odstupanja u skupini B za prvi (N=26) i četvrti razred (N=30)

	BROJ TOČNIH RJEŠENJA						D	s. o.
	0	1	2	3	4	5		
Prvi razred	6	9	3	4	2	2	1	1.192
Četvrti razred	1	0	3	9	3	14	5	1.167

* Dominantna vrijednost

** Srednje odstupanje – predstavlja prosječno odstupanje rezultata od dominantne vrijednosti i računa se prema formuli s. o. = $(\sum | x - D |) / N$

PRILOG 2. LISTE ZADATAKA KORIŠTENE U ISTRAŽIVANJU

FORMA C

IME I PREZIME:_________________ **RAZRED:________**

Petar je hodao sat vremena i za to je vrijeme prehodao 4 km. Koliko će kilometara prehodati ako će hodati dva sata?

a) 5 km
b) 6 km
c) 7 km
d) 8 km
e) 9 km

Cijena jedne loptice za golf je 20 kuna. Kolika je cijena 8 loptica za golf?

a) 40 kuna
b) 60 kuna
c) 80 kuna
d) 160 kuna
e) 320 kuna

20 zečeva dnevno pojede 16 klipova kukuruza. Koliko će klipova dnevno pojesti 5 zečeva?

a) 2 klipa
b) 4 klipa
c) 10 klipova
d) 11 klipova
e) 3 klipa

Opseg jednakostraničnog trokuta kojemu je stranica dugačka 11 cm iznosi 33 cm. Koliko iznosi opseg jednakostraničnog trokuta kojemu je stranica tri puta duža?

a) 55 cm
b) 40 cm
c) 81 cm
d) 114 cm
e) 99 cm

Da bismo postavili pločice po jednoj stepenici, potrebno nam je 8 pločica. Koliko pločica trebamo da bismo popločili 15 stepenica?

a) 120 pločica
b) 300 pločica
c) 50 pločica
d) 86 pločica
e) 200 pločica

FORMA A

IME I PREZIME:________________________ **RAZRED:______**

U pizzeriji velika pizza, promjera 30 cm, košta 32 kune. Koliko bi trebala koštati mala pizza, promjera 15 cm?

a) 30 kuna
b) 8 kuna
c) 25 kuna
d) 16 kuna
e) 20 kuna

U voćnjaku koji je oblika kvadrata s dužinom stranice 50 metara može rasti 20 stabala jabuka. Koliko stabala može rasti u voćnjaku oblika kvadrata kojemu je stranica dugačka 200 metara?

a) 40
b) 80
c) 320
d) 640
e) 135

Šetnja oko jezera površine 1 km^2 traje 1 sat. Koliko traje šetnja oko jezera površine 4 km^2?

a) 2 sata
b) 30 minuta
c) 4 sata
d) 1 sat i 15 minuta
e) 6 sati

Karta Hrvatske u mjerilu 1:1 000 000 je površine 3600 cm^2. Kolika je površina karte Hrvatske u mjerilu 1:3 000 000?

a) 1200 cm^2
b) 400 cm^2
c) 50 cm^2
d) 2200 cm^2
e) 100 cm^2

U zdjeli je dovoljno smjese za ispeći 18 palačinki u tavi promjera 10 cm. Koliko ćemo palačinki ispeći ako ih pečemo od iste količine smjese u tavi promjera 30 cm?

a) 15
b) 12
c) 11
d) 6
e) 2

FORMA B

IME I PREZIME:___________________ **RAZRED:_______**

U pizzeriji velika pizza, promjera 30 cm, košta 32 kune. Koliko bi trebala koštati mala pizza, promjera 15 cm?

f) 30 kuna
g) 8 kuna
h) 25 kuna
i) 21 kunu
j) 20 kuna

U voćnjaku koji je oblika kvadrata s dužinom stranice 50 metara može rasti 20 stabala jabuka. Koliko stabala može rasti u voćnjaku oblika kvadrata kojemu je stranica dugačka 200 metara?

f) 40
g) 50
h) 320
i) 640
j) 135

Šetnja oko jezera površine 1 km^2 traje 1 sat. Koliko traje šetnja oko jezera površine 4 km^2?

f) 2 sata
g) 30 minuta
h) 3 sata
i) 1 sat i 15 minuta
j) 6 sati

Karta Hrvatske u mjerilu 1:1 000 000 je površine 3600 cm^2. Kolika je površina karte Hrvatske u mjerilu 1:3 000 000?

f) 3000 cm^2
g) 400 cm^2
h) 50 cm^2
i) 2200 cm^2
j) 100 cm^2

U zdjeli je dovoljno smjese za ispeći 18 palačinki u tavi promjera 10 cm. Koliko ćemo palačinki ispeći ako ih pečemo od iste količine smjese u tavi promjera 30 cm?

f) 15
g) 12
h) 11
i) 4
j) 2