

Sveučilište u Zagrebu  
Filozofski fakultet  
Odsjek za psihologiju

**RAZUMIJEVANJE OSNOVNIH PRINCIPA ZBRAJANJA KOD VRTIĆKE  
DJECE**

Diplomski rad

Silvija Lucić

Mentor: dr.sc. Vesna Vlahović-Štetić

Zagreb, 2007.

## Sadržaj

<b>Uvod</b> .....	<b>1</b>
<i>Dječji kognitivni razvoj i matematika</i> .....	1
<i>Strategije zbrajanja</i> .....	2
<i>Osnovni principi zbrajanja</i> .....	3
<i>Aditivnost</i> .....	4
<i>Komutativnost</i> .....	4
<i>Asocijativnost</i> .....	8
<i>Odnos između aditivnosti, komutativnosti i asocijativnosti</i> .....	8
<b>Problemi i hipoteze</b> .....	<b>10</b>
<b>Metodologija</b> .....	<b>11</b>
<i>Varijable</i> .....	11
<i>Sudionici</i> .....	12
<i>Pribor</i> .....	12
<i>Postupak</i> .....	12
<b>Rezultati</b> .....	<b>15</b>
<b>Rasprava</b> .....	<b>18</b>
<i>Praktične implikacije</i> .....	22
<b>Zaključak</b> .....	<b>23</b>
<b>Literatura</b> .....	<b>24</b>

## **Razumijevanje osnovnih principa zbrajanja kod vrtićke djece** **Understanding of addition principles at kindergartners**

**Silvija Lucić**

**Sažetak:** Cilj provedenog istraživanja bio je ispitati razumijevanje osnovnih principa zbrajanja, principa aditivnosti, komutativnosti i asocijativnosti, kod vrtićke djece uz uporabu konkretnih objekata. U istraživanju su sudjelovale dvije dobne skupine djece, četverogodišnjaci i petogodišnjaci. Korištene su tri vrste zadataka kojima su ispitivani osnovni principi zbrajanja. Prepostavili smo da će djeca biti uspješnija u zadacima komutativnosti u odnosu na zadatke aditivnosti i asocijativnosti, te da će četverogodišnjaci biti jednako uspješni kao i petogodišnjaci u zadacima komutativnosti, ali da će petogodišnjaci biti statistički značajno bolji u zadacima aditivnosti i asocijativnosti. Nije pronađena razlika u razumijevanju principa aditivnosti, komutativnosti i asocijativnosti kod vrtićke djece. Također nije pronađena razlika između četverogodišnjaka i petogodišnjaka u razumijevanju principa aditivnosti, principa komutativnosti i principa asocijativnosti. Rezultati su u skladu sa stajalištem Resnickove (1991) koja smatra da se razumijevanje principa zbrajanja ne razvija odvojeno te da djeca mogu razmišljati o odnosima među objektima bez da znaju njihove točne količine. Pronađena je visoka uspješnost rješavanja zadataka za sva tri principa zbrajanja.

**Summary:** The aim of this study was to examine the understanding of concrete version of addition principles, additive composition, commutativity and associativity, at kindergartners. 4- and 5-year-olds participated in this study. Three different kinds of problems were used to examine addition principles. It was assumed that children would meet with more success when dealing with commutativity than with additive composition and associativity. It was also assumed that 4-year-olds would be equally successful as 5-year-olds when dealing with commutativity problems, but less successful at additive composition problems and associativity problems. Study results indicated no difference in understanding additive composition, commutativity and associativity principles at kindergartners. Study results also indicated no difference between 4- and 5-year-olds in understanding additive composition principle, commutativity principle and associativity principle. Study results support Resnick's (1991) claims, according to which the understandings of addition principles do not develop separately and the results also go along with her claims that children can think about relations among unenumerated quantities. High accuracy of problem solving for all three addition principles was found.

**Ključne riječi:** principi zbrajanja, konkretni objekti, vrtićka djeca, model Resnickove

**Key words:** addition principles, concrete version, kindergartners, Resnick's model

## Uvod

### *Dječji kognitivni razvoj i matematika*

Djetetove sposobnosti su mnogo veće nego što su psiholozi nekad mislili, ali današnja “superbeba“ se ipak uvelike razlikuje od odraslog čovjeka. Utvrđivanje sličnosti i razlika između malog djeteta i odrasle osobe, kako navode Vasta, Haith i Miller (1998), jedan je od najvećih izazova dječje suvremene psihologije. Istraživače zanima koji su to čimbenici koji “kompetentno novorođenče“ pretvaraju u potpuno kompetentnu odraslu osobu. Posebno zanimanje postoji za dječji kognitivni razvoj. Pojam kognicije se odnosi na više mentalne procese pomoću kojih ljudi pokušavaju shvatiti i prilagoditi sebi svijet u kojem žive. (Vasta i sur., 1998) Ti se procesi obično nazivaju: mišljenje, rasuđivanje, učenje i rješavanje problema. Dječjim kognitivnim razvojem posebno se bavio Jean Piaget. On smatra da djeca stvaraju kvalitativno različite strukture koje im postupno omogućavaju bolje razumijevanje svijeta. Te strukture naziva razvojnim stupnjevima i razvoj dijeli na četiri stupnja ili razdoblja: senzomotoričko, predoperacijsko, konkretno i formalno razdoblje. Nas posebno zanima predoperacijsko razdoblje koje traje od 2. do 6. godine života. U tom razdoblju dijete je sposobno rješavati probleme pomoću predočavanja, umjesto izravnim djelovanjem. Mišljenje je brže nego ranije, učinkovitije, pokretljivije i više socijalno uklopljeno. Ali djetetovi početni pokušaji predočavanja pokazuju i određena ograničenja. Zanimljivo je stoga istražiti kako se ta ograničenja svladavaju i kako se pojavljuju novi oblici kompetencije.

Iako dječje mišljenje već na ovom stupnju pokazuje određene pomake, ono se još uvelike razlikuje od logičkog razmišljanja odraslih. Glavno obilježje dječjeg mišljenja na predoperacijskom stupnju je konkretnost. To znači da je dijete još uvijek umjereno na razmišljanje o prisutnim predmetima ili onima koji su povezani s trenutnom situacijom. (Vasta i sur., 1998) Budući da ćemo se uputiti u istraživanje jednog specifičnog oblika mišljenja, rješavanja matematičkih zadataka, važno je znati kako razmišljaju djeca koju ćemo proučavati. Stoga je važno način proučavanja prilagoditi razvojnom stupnju djeteta i njegovim mogućnostima. Važno je znati kada

djeca počinju usvajati matematičke pojmove, a to se izgleda događa puno prije polaska u školu i poučavanja matematike.

Formalno poučavanje matematike započinje s djetetovim polaskom u osnovnu školu, ali već u djetinjstvu, kroz igru i ostala svakodnevna iskustva, djeca stječu određena znanja o brojevima, skupovima, računanju i mjerenju. Vizek Vidović, Rijavec, Vlahović-Štetić i Miljković (2003) navode da djeca tijekom druge godine nauče nazive brojeva, ali ne shvaćaju njihov pravi smisao. U trećoj godini uče brojati, a do predškolske dobi većina djece zna zbrajati do 10 te nauče pisane simbole za te brojeve.

Budući da djeca već posjeduju određena matematička znanja, važno je da se školsko poučavanje što jasnije nadovezuje na dječje svakodnevno iskustvo. Jedan mogućí način je da se prilikom poučavanja koriste konkretni materijali, kao što su igračke, kockice ili bomboni. Ti predmeti su posebno pogodni jer su djeci dobro poznati i ona s njima sigurno rukuju, a uz njihovu pomoć mogu se prikazati sve osnovne aritmetičke operacije s prirodnim brojevima.

Djecu se može poučavati matematičke pojmove, ali isto tako i matematičke postupke. Brojni psiholozi razlikuju te dvije vrste znanja. Prema Vizek Vidović i sur. (2003), znanje pojmova uključuje razumijevanje i smještanje pojmova u kognitivnu shemu, a znanje postupaka uključuje poznavanje matematičkog jezika, algoritama ili pravila za provođenje postupaka, ali i koraka u rješavanju problemskih zadataka. Kod zbrajanja možemo reći da znanje postupaka znači poznavanje strategija zbrajanja, a znanje pojmova razumijevanje osnovnih principa zbrajanja.

### *Strategije zbrajanja*

Predškolska djeca se pri zbrajanju koriste jednostavnim strategijama koje se temelje na brojanju unaprijed. Vlahović-Štetić i Vizek Vidović (1998) navode da se radi o slijedećim strategijama:

1. *Prebrojavanje svih članova u skupu.* Da bi riješilo zadatak  $3+5$  dijete podiže tri prsta, zatim pet i broji izgovarajući: “1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8“.

2. *Nastavljanje brojenja od prvog pribrojnika.* Dijete rješava isti zadatak ( $3+5$ ) tako da odmah digne tri prsta i nastavi podizati još pet prstiju po jedan uz odbrojavanje: "4, 5, 6, 7, 8".
3. *Strategija "pribrajanja manjeg".* Ova strategija predstavlja znatan napredak u smislu sve veće ekonomičnosti računanja. Zadatak  $3+5$  dijete koje rabi ovu strategiju riješit će tako da digne 5 prstiju, tj. počinje od većeg pribrojnika i nastavlja dodavati još tri prsta odbrojavajući: "6, 7, 8".
4. *Kombinacija dosjećanja i strategije.* Kad se prijeđe na računanje s većim brojevima, istodobno se koriste i činjenično znanje i strategije. Primjerice, djeca i odrasli ponekad zbrajaju  $7+9$  tako da jedan pribrojnik rastave na  $7+2$ , automatski iz sjećanja povuku rezultat  $7+7=14$  i zatim, rabeći strategiju pribrojavanja manjeg, dodaju 2.
5. *Strategija dosjećanja* u kojoj se dozove informacija iz dugoročnog pamćenja. Primjerice, dijete odmah odgovori da je  $7+9=16$ .

Prema Vlahović-Štetić i Vizek Vidović (1998) pokazalo se da ni djeca ni odrasli sustavno ne koriste samo jednu strategiju. Npr. Ako osoba treba jako brzo nešto izračunati dosjetit će se onoga što već zna, riskirajući pritom pogrešku. Ako je važno da rezultat bude točan, upotrijebit će strategiju za koju smatra da će dovesti do točnog rezultata. Kod djece je to vremenski neekonomična strategija prebrojavanja svih članova u skupu.

Siegler (2002; prema Fox, 2005) smatra da djeca istovremeno posjeduju različite strategije zbrajanja, ali s iskustvom brže i točnije strategije zamjenjuju one sporije i manje točne.

### *Osnovni principi zbrajanja*

Osnovni principi zbrajanja su aditivnost, komutativnost i asocijativnost. Princip aditivnosti kaže da je cjelina sastavljena od dijelova, princip komutativnosti da redosljed pribrojnika ne utječe na ukupan rezultat, a princip asocijativnosti kaže da skupovi rastavljeni te ponovno kombinirani drugačijim redosljedom imaju isti rezultat.

### *Aditivnost*

Aditivnost je princip koji podrazumijeva da su veći skupovi sastavljeni od manjih skupova,  $(a + b) + c = a + b + c$ . Dječje razumijevanje principa aditivnosti smatra se temeljnim za shvaćanje aritmetike i dekadnog broječnog sustava. (Cowan i Martins-Mourao, 1998)

Resnickova (1983, prema Cowan i Martins-Mourao, 1998) smatra da predškolska djeca mogu uspješno rješavati zadatke koji se temelje na principu aditivnosti, ali kad ih se izravno pita, ne znaju taj princip objasniti. Ako djeca objašnjavaju zadatke izjavljujući da je cjelina sastavljena od dijelova, tada se smatra da razumiju aditivnost. Npr. ako dijete dobije zadatak "Petar je imao nekoliko jabuka, Ivan mu je dao još pet, sada ima osam. Koliko je jabuka imao u početku?" ono ima poteškoća u brojanju na prste jer ne može prikazati početni broj. Međutim, ako dijete razmišlja u terminima dio-cjelina, odnosno da se osam sastoji od pet i još nekoliko, sposobno je okrenuti redoslijed zadatka i tako doći do rješenja. Sophianova i McCorgrayerova (1994; prema Sophian i Vong, 1995) su pronašli da djeca već u dobi od 5 godina kod matematičkih zadataka primjećuju da se cjelina sastoji od dijelova.

Nunes i Bryant (1996; prema Cowan i Martins-Mourao, 1998) smatraju da je upotreba strategije "pribrajanja manjeg" nužan uvjet za razumijevanje aditivnosti. Međutim, rezultati istraživanja Cowana i Martins-Mouraoa (1998) pokazuju da je razumijevanje principa aditivnosti preduvjet za korištenje strategije "pribrajanja manjeg". To je u skladu sa stajalištem Resnickove (1983, prema Cowan i Martins-Mourao, 1998) koja smatra da je korištenje strategije "pribrajanja manjeg" posljedica već postignutog razumijevanja principa aditivnosti.

### *Komutativnost*

Komutativnost je princip po kojemu ukupan rezultat ne ovisi o redoslijedu pribrojnika,  $a + b + c = a + c + b$ . Baroody (1987; prema Sophian, Harley i Manos Martin, 1995) smatra da se razumijevanje komutativnosti relativno kasno razvije i da ga većina vrtičke djece ne uspijeva postići.

Postoji nekoliko različitih modela koji prikazuju kako se razvija razumijevanje komutativnosti. Resnickova (1992; prema Baroody i Dowker, 2003) smatra da je za razvoj razumijevanja komutativnosti temeljno razumijevanje principa aditivnosti.

Model koji predlaže prikazan je u tablici 1. Djeca najprije znaju da se cjelina može rastaviti na dijelove, da se dijelovi mogu ponovno kombinirati u cjelinu i da redosljed kojim su dijelovi kombinirani ne mijenja cjelinu (protokvantitativna razina). Zatim dijelovi i cjelina dobivaju količinu (kvantitativna razina). Zatim djeca više ne trebaju konkretne objekte koji bi prikazivali količinu već počinju shvaćati simbole brojeva (numerička razina). Konačno, počinju shvaćati općenite odnose među brojevima (razina operacija) i tada razumiju smisao principa komutativnosti.

*Tablica 1*  
Razine razvoja komutativnosti (Resnick, 1992; Baroody i Dowker, 2003).

<i>razina komutativnosti</i>	<i>primjer</i>
protokvantitativna (prednumerička)	jabuke + naranče = naranče + jabuke ( $dio_1 + dio_2 = dio_2 + dio_1$ )
kvantitativna (brojevi u smislenom kontekstu)	3 jabuke + 5 jabuka = 5 jabuka + 3 jabuke
numerička (brojevi u apstraktnom kontekstu)	$3 + 5 = 5 + 3$
razina operacija (opći aritmetički principi)	$a + b = b + a$

Baroody i Gannonova (1984; prema Baroody i Dowker, 2003) su pretpostavili razvoj komutativnosti kroz četiri nešto drugačije razine. Model je prikazan u tablici 2. Oni smatraju da se razumijevanje komutativnosti razvija od unarne koncepcije zbrajanja bez razumijevanja komutativnosti do binarne koncepcije zbrajanja i pravog razumijevanja komutativnosti.

Prema Weaveru (1982; Baroody i Dowker, 2003) unarne operacije su operacije na jednom broju koje rezultiraju drugim brojem (npr. “Ana je imala tri bombona. Majka joj je dala još dva. Koliko sada bombona ima Ana?”), dok pod binarnim operacijama podrazumijeva operacije na dvije količine koje rezultiraju trećom (“Iva ima tri mačke i dva psa, koliko ljubimaca Iva ima zajedno?”).



Tablica 2

Razine razvoja komutativnosti (Baroody i Gannon, 1984; prema Baroody i Dowker, 2003).

---

<i>Razina 0</i>	unarna koncepcija zbrajanja + nema razumijevanja komutativnosti (djeca vide $5 + 3$ kao 5 i još 3, a $3 + 5$ kao 3 i još 5, tj. kao različite zadatke s različitim rješenjima)
<i>Razina 1</i>	unarna koncepcija zbrajanja + protokomutativnost (djeca intuitivno zanemaruju redoslijed pribrojnika zato jer to umanjuje napor pri računanju, ali kad ih se izravno pita o komutativnosti, odgovaraju netočno ili s oklijevanjem, tj. ne prepoznaju uvijek da se kod $3 + 5$ i $5 + 3$ radi o istom zadatku s istim rješenjem)
<i>Razina 2</i>	unarna koncepcija zbrajanja + pseudokomutativnost (djeca još uvijek imaju unarnu koncepciju zbrajanja, ali shvaćaju da $3 + 5$ i $5 + 3$ imaju isto rješenje)
<i>Razina 3</i>	binarna koncepcija zbrajanja + prava komutativnost (djeca shvaćaju da su 3 i 5 dijelovi cjeline 8 koji mogu mijenjati svoj redoslijed)

---

Rezultati ranijih istraživanja (De Corte i Verschaffel, 1987; Wilkins i sur., 2001; prema Baroody i Dowker, 2003) pokazuju da model Resnickove (1992), prikazan u tablici 1, nije potpuno točan. Resnickova (1992; prema Baroody i Dowker, 2003) navodi da djeca najprije usvajaju razumijevanje aditivnosti, odnosno da najprije razumiju da se cjelina sastoji od dijelova. De Corte i Verschaffel (1987; prema Baroody i Dowker, 2003) isto kao i Wilkins i sur. (2001; prema Baroody i Dowker, 2003) navode da razumijevanje da se cjelina sastoji od dijelova (razumijevanje aditivnosti) kod mlađe djece nije potpuno usvojeno. Isti istraživači navode da ni model razvoja komutativnosti Baroodyja i Gannonove (1984), prikazan u tablici 2, nije točan jer se protokomutativnost i pseudokomutativnost javljaju tek nakon što djeca razviju binarni pogled na zbrajanje, a ne ranije kao što navode Baroody i Gannonova (1984). Stoga Baroody i Dowker (2003) predlažu model razvoja komutativnosti koji ujedinjuje model Baroodyja i Gannonove (1984) s modelom Resnickove (1992) i ispravlja manjkavosti navedenih modela. Takav ujedinjeni model prikazan je u tablici 3.

*Tablica 3*  
Ujedinjeni model razvoja komutativnosti (Baroody i Dowker, 2003).

---

Razina 0	unarna koncepcija + nema razumijevanja komutativnosti
Razina 1	unarna koncepcija + nema razumijevanja komutativnosti i binarna koncepcija + protokomutativnost
Razina 2	unarna koncepcija + protokomutativnost i binarna koncepcija + dio-cjelina ("prava") komutativnost
Razina 3	unarna koncepcija + pseudokomutativnost i binarna koncepcija + dio-cjelina ("prava") komutativnost

---

Prema nekim istraživačima (Cowan i Renton, 1996; Groen i Resnick, 1977; prema Canobi, Reeve i Pattison, 1998), upotreba strategija zbrajanja koje zanemaruju redoslijed pribrojnika, kao npr. strategija "pribrajanja manjeg", smatra se dokazom razumijevanja komutativnosti. S tim u skladu su i rezultati istraživanja Cowana i Rentonove (1996) koji pokazuju da djeca već u dobi od 5 godina točno rješavaju zadatke komutativnosti iako uglavnom još uvijek ne koriste strategije zbrajanja koje zanemaruju redoslijed pribrojnika.

Nasuprot tome, Groen i Resnickova (1977; prema Sophian i sur., 1995) su pronašli da četverogodišnjaci i petogodišnjaci spontano počinju koristiti strategiju "pribrajanja manjeg" prije nego što su sposobni rješavati zadatke koji direktno mjere razumijevanje komutativnosti. U skladu s tim, Baroody (1987; prema Sophian i sur., 1995) je pronašao da doista većina vrtičke djece uspješno koristi strategiju "pribrajanja manjeg" dok većina njih još uvijek nije sposobna usvojiti razumijevanje principa komutativnosti. On smatra da djeca traže načine da uštede kognitivni napor (Baroody i Gannon, 1984), a to i postižu time ako krenu zbrajati s većim pribrojnikom. To je uspješan postupak zato jer je zbrajanje "slučajno" komutativno, a ne zato jer djeca razumiju da je zbrajanje komutativno. Međutim, Baroodyjevi podaci imaju jedno ograničenje. Njegovi zadaci su bili sastavljeni od brojeva prikazanih simbolima, a nije provjerio dječje razumijevanje komutativnosti na konkretnim objektima.

### *Asocijativnost*

Asocijativnost je princip prema kojemu zadaci u kojima su skupovi razdvojeni te ponovno kombinirani drugačijim redoslijedom imaju isti rezultat,  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .

Steinberg (1985; prema Canobi i sur., 1998) tvrdi da upotreba strategija rastavljanja odražava poznavanje principa aditivnosti i asocijativnosti. Npr. kod rješavanja problema  $5 + 6$  dijete razmišlja: "Znam da je  $5 + 5 = 10$  i da je  $5 + 1 = 6$ , dakle,  $5 + 6$  je isto što i  $5 + (5 + 1)$  ili  $10 + 1$ , što iznosi 11.

### *Odnos između aditivnosti, komutativnosti i asocijativnosti*

Canobieva, Reeve i Pattisonova (2002) smatraju da su neki principi složeniji nego drugi, kao što je asocijativnost složenija od komutativnosti, te da se stoga njihovo razumijevanje usvaja kasnije. To potvrđuju i nalazi istraživanja Closea i Murtagha (1986; prema Canobi i sur. 2002), koji su pokazali da djeca točnije rješavaju zadatke komutativnosti, nego zadatke asocijativnosti. Rezultati istraživanja Canobieve i sur. (1998) su pokazali da su djeca, starosti od 6 do 8 godina, koja su uspješno rješavala zadatke aditivnosti i zadatke asocijativnosti, uspješno rješavala i zadatke komutativnosti. Obrnuto nije vrijedilo. Njima je prepoznavanje i objašnjavanje aditivnosti i asocijativnosti bilo teže nego prepoznavanje i objašnjavanje komutativnosti. To znači da djeca ranije usvajaju razumijevanje da brojevi mogu biti kombinirani različitim redoslijedom, nego što razumiju da se brojevi mogu rastaviti i ponovno grupirati na različite načine.

Langford (1981; prema Canobi i sur., 1998), koji je ispitivao razumijevanje principa uz uporabu konkretnih objekata, također smatra da djeca razumiju komutativnost prije asocijativnosti. Razumijevanje asocijativnosti podrazumijeva znanje da se tri ili više brojeva može kombinirati ili grupirati na različite načine, što može biti zahtjevnije nego razumijevanje da mijenjanje redoslijeda pribrojnika neće utjecati na konačni zbroj.

Baroody i njegovi suradnici (Baroody i Gannon, 1984; Baroody i Ginsburg, 1986; prema Canobi i sur., 1998) smatraju da djeca ne moraju postići potpuno razumijevanje komutativnosti da bi uspješno rješavala zadatke komutativnosti. Oni smatraju da neka djeca mogu pokazivati poznavanje protokomutativnosti te zbog toga točno rješavaju zadatke komutativnosti, ali kad ih se izravno pita o komutativnosti, odgovaraju netočno ili s oklijevanjem. To znači da oni upotrebljavaju komutativnost u rješavanju problema bez da ju razumiju na općenitoj razini. Da djeca rano usvajaju razumijevanje principa komutativnosti pokazuje i istraživanje Sophianove i sur. (1995) koje pokazuje da već trogodišnjaci i četverogodišnjaci pokazuju visok stupanj uspješnosti u zadacima komutativnosti.

Suprotno navedenim stajalištima, Resnickova (1992, 1994; prema Canobi i sur. 2002) tvrdi da nema razlike u dječjem razumijevanju asocijativnosti i komutativnosti te da se asocijativnost i komutativnost nastavljaju na razumijevanje aditivnosti. Ona smatra da je razumijevanje principa aditivnosti temeljno da bi djeca mogla razumjeti ostale principe.

Iz razloga što su principi aditivnosti, komutativnosti i asocijativnosti opći principi zbrajanja, nije nužno znati točne vrijednosti pribrojnika da bi se mogao prepoznati princip. Stoga ćemo ovo istraživanje provesti uz uporabu konkretnih objekata onemogućavajući djeci da izračunaju sumu u zadatku, tako da nemaju potrebe primjenjivati strategije zbrajanja. Time ćemo procijeniti samo razumijevanje principa zbrajanja.

## Problemi i hipoteze

Ispitati postoji li:

- a) razlika u dječjem razumijevanju tri osnovna principa zbrajanja – aditivnosti, komutativnosti i asocijativnosti
- b) razlika u razumijevanju principa zbrajanja između djece u dobi od četiri i pet godina
- c) interakcija između osnovnih principa zbrajanja i dobi

### *Hipoteze*

a) *Očekujemo da će djeca biti uspješnija u zadacima komutativnosti u odnosu na zadatke aditivnosti i asocijativnosti. To je u skladu s nalazima iz literature (Canobi i sur., 2002) koji kažu da su neki principi složeniji od drugih, odnosno da su aditivnost i asocijativnost složenije od komutativnosti.*

b) *Očekujemo da će petogodišnjaci biti uspješniji od četverogodišnjaka u zadacima koji predstavljaju principe zbrajanja. To je u skladu s nalazima Sophianove i McCograyeve (1994; prema Sophian i Vong, 1995), koje su pronašle da su djeca u dobi od 5 godina uspješnija pri rješavanju matematičkih zadataka u odnosu na djecu u dobi od 4 godine.*

c) *Iako očekujemo da će petogodišnjaci sveukupno biti uspješniji od četverogodišnjaka, smatramo da bi kod principa komutativnosti mogli dobiti drugačije rezultate. Stoga očekujemo da će petogodišnjaci biti statistički značajno uspješniji u zadacima aditivnosti i asocijativnosti, ali da će četverogodišnjaci biti jednako uspješni kao i petogodišnjaci u zadacima komutativnosti. To je u skladu s nalazima iz literature (Canobi i sur., 1998, 2002) koji kažu da djeca ranije razumiju da brojevi mogu biti kombinirani različitim redoslijedom (princip komutativnosti), nego što razumiju da su veći brojevi sastavljeni od manjih brojeva te da se mogu rastaviti i ponovno grupirati na različite načine (principi aditivnosti i asocijativnosti).*

## Metodologija

### *Varijable*

*Dob* – sudionici su podijeljeni s obzirom na dob u dvije skupine: jednu skupinu čine djeca u dobi od 4 godine (n=35), a drugu skupinu djeca u dobi od 5 godina (n=35).

*Razumijevanje osnovnih principa zbrajanja* – procijenjeno je kao uspješnost rješavanja zadataka koji se temelje na tim principima. Principe zbrajanja operacionalizirali smo kao i Canobieva i sur. (2002). Bomboni su predstavljali količine, a kutije u koje su stavljani zamjenjivale su zgrade. Za svaki od principa zbrajanja korištena su po tri zadatka (3 zadatka aditivnosti, 3 zadatka komutativnosti i 3 zadatka asocijativnosti).

Primjer zadatka za ispitivanje aditivnosti: “Tin dobije kutiju sa zelenim bombonima i 3 plava bombona (stavi se u prvu kutiju), zatim dobije 4 crvena bombona (stavi se u drugu kutiju). Tina dobije kutiju sa zelenim bombonima (stavi se u prvu kutiju), zatim dobije 3 plava bombona (stavi se u drugu kutiju), zatim dobije 4 crvena bombona (stavi se u treću kutiju). Imaju li Tin i Tina jednaki broj bombona?”

Primjer zadatka za ispitivanje komutativnosti: “Tin dobije kutiju sa zelenim bombonima (stavi se u prvu kutiju), zatim dobije 3 plava bombona (stavi se u drugu kutiju), zatim dobije 4 crvena bombona (stavi se u treću kutiju). Tina dobije kutiju sa zelenim bombonima (stavi se u prvu kutiju), zatim dobije 4 crvena bombona (stavi se u drugu kutiju), zatim dobije 3 plava bombona (stavi se u treću kutiju). Imaju li Tin i Tina jednaki broj bombona?”

Primjer zadatka za ispitivanje asocijativnosti: “Tin dobije kutiju sa zelenim bombonima i 3 plava bombona (stavi se u prvu kutiju), zatim dobije 4 crvena bombona (stavi se u drugu kutiju). Tina dobije kutiju sa zelenim bombonima (stavi se u prvu kutiju), zatim dobije 3 plava i 4 crvena bombona (stavi se u drugu kutiju). Imaju li Tin i Tina jednaki broj bombona?”

### *Sudionici*

U istraživanju su sudjelovala djeca iz dvaju zagrebačkih vrtića. Iz dječjeg vrtića "Jarun" sudjelovalo je 56 djece, a iz dječjeg vrtića "Rudeš" 30 djece. Rezultati šestero djece koja nisu dala odgovore na sva pitanja izostavljeni su iz daljnje obrade. Iza daljnje obrade su također izostavljena djeca koja su davala pristrane odgovore, odnosno ona koja su uvijek odgovarala "Da, imaju jednaki broj bombona" ili "Ne, nemaju jednaki broj bombona". Takva djeca su otkrivena zadacima jednakosti (u kojima medvjedići uvijek imaju jednaki broj bombona) i zadacima nejednakosti (u kojima medvjedići uvijek imaju različiti broj bombona). Time je iz obrade izostavljeno još 10 sudionika. Uzorak tako čini 70 sudionika.

Za sudjelovanje u istraživanju dobivena je pismena dozvola roditelja.

### *Pribor*

U istraživanju su korištena dva bijela medvjedića, visine oko 40 cm, s kapama u različitim bojama. Zatim je korišteno šest bijelih kutija dimenzija 22x13x4 cm. Također su korištene i dvije plave kutije sa po 3 plava bombona u svakoj, dvije crvene kutije sa po 4 crvena bombona u svakoj i dvije zelene kutije sa po 10 zelenih bombona u svakoj kutiji. Navedene kutije imale su dimenzije 11,5x7x2,5 cm. Korišteni su probni i testni zadaci (zadaci za ispitivanje tri principa zbrajanja i zadaci jednakosti i nejednakosti) te individualni protokoli.

### *Postupak*

Ispitivanje je provedeno tijekom svibnja 2005. godine u prostorijama dječjeg vrtića "Jarun" i dječjeg vrtića "Rudeš" u Zagrebu. Ispitivanje je provedeno individualno sa svakim djetetom, a provodile su ga studentice Odsjeka za psihologiju, Filozofskog fakulteta u Zagrebu, koje su za to bile posebno educirane.

Prije samog početka mjerenja zadatak eksperimentatorice bio je da postavi dva medvjedića nasuprot djetetu, jedan do drugoga, i ispred svakog medvjedića stavi po 3 bijele kutije (koje su predstavljale zgrade), svaku u razmaku od 4-5 cm. Nakon toga u obje plave kutije stavila je po 3 plava bombona, u obje crvene kutije po 4 crvena bombona i u obje zelene kutije po 10 zelenih bombona (poslaganih jedni na druge), te ih

je odložila sa strane.

Nakon što je dijete sjelo nasuprot medvjedićima eksperimentatorica mu je objasnila kako će se oni sada igrati igru u kojoj dva medvjedića po imenu Tin i Tina dobivaju neke bombone, a njegov zadatak je da kaže jesu li Tin i Tina dobili jednaki broj bombona. Zatim je eksperimentatorica djetetu pokazala 2 plave kutije sa po 3 plava bombona i rekla: "Pogledaj, ove dvije kutije su jednake. U svakoj se nalazi po 3 plava bombona!" Zatim je pokazala 2 crvene kutije sa po 4 crvena bombona i rekla: "Pogledaj, ove dvije kutije su jednake. U svakoj se nalazi po 4 crvena bombona!" I na kraju je pokazala dvije zelene kutije sa po 10 zelenih bombona poslaganih jedni na druge, kako ih djeca ne bi mogla prebrojati, i rekla: "Pogledaj, ove dvije kutije su jednake. U obje se nalazi jednaki broj zelenih bombona!" Kod zelenih bombona nije se govorilo koliki je broj bombona u kutiji s ciljem da se kod djece spriječi zbrajanje (ako je dijete pitalo koliko ima zelenih bombona, eksperimentatorica mu je odgovorila da ima puno zelenih bombona). Eksperimentatorica je zatim napomenula djetetu da bombone ne treba brojati.

Nakon toga eksperimentatorica je djetetu dala 3 probna zadatka čija je svrha da se djeca prilagode zadacima i da se provjeri sjećaju li se da kutije u boji sadrže jednaki broj bombona. Eksperimentatorica je sjedila s desne strane djetetu i stavljala bombone s lijeva na desno, na način da sve grupe bombona ostanu vidljive djetetu tako da se ono ne mora oslanjati na pamćenje riječi ili radnji eksperimentatorice kako bi procijenilo jednakost bombona kod Tina i Tine. Istovremeno kako je eksperimentatorica stavljala bombone, tako je i opisivala što radi.

Primjer probnog zadatka: "Tin dobije 4 crvena bombona (stavlja se u prvu bijelu kutiju ispred medvjedića). Tina dobije 4 crvena bombona (stavlja se u prvu bijelu kutiju ispred medvjedića)." Nakon što je stavila bombone ispred medvjedića, eksperimentatorica je upitala dijete: "Imaju li Tin i Tina jednaki broj bombona?" Odgovor djeteta zabilježen je u individualni protokol, a zatim je dijete dobilo povratnu informaciju i objašnjenje o tome je li njegov odgovor točan ili netočan. Ako je djetetov odgovor bio točan eksperimentatorica mu je rekla: " Da, Tin je dobio 4 crvena bombona i Tina je dobila 4 crvena bombona. Znači, oni imaju jednaki broj bombona!" Ako je djetetov odgovor bio netočan eksperimentatorica mu je rekla: "Nije točno, Tin je dobio 4 crvena bombona i Tina je dobila 4 crvena bombona. Oboje imaju po 4 crvena



bombona. Znači, oni imaju jednaki broj bombona!" Nakon što je dijete riješilo tri probna zadatka uslijedila je primjena testnih zadataka.

Svako dijete dobilo je kombinaciju od 15 zadataka raspoređenih po slučajnom rasporedu (3 zadatka aditivnosti, 3 zadatka komutativnosti, 3 zadatka asocijativnosti, 3 zadatka jednakosti i 3 zadatka nejednakosti). Postojale su tri različite grupe zadataka (A, B i C) koje su se razlikovale po redosljedju zadataka. Time se htjelo izbjeći da zadaci budu zadavani uvijek istim redosljedom.

Testni zadaci su slični probnim zadacima, osim što je eksperimentatorica davala po tri kutije bombona svakom medvjediću, a kod probnih zadataka po jednu ili dvije kutije. Postupak izvođenja zadatka bio je isti kao i kod probnih zadataka. Zadaci jednakosti ( $a+b=a+b$ ) i nejednakosti ( $a+b=b+c$ ), kao što je ranije navedeno, korišteni su za otkrivanje sudionika koji su imali sklonost davanja pristranih odgovora.

Primjer zadatka jednakosti: "Tin dobije 4 crvena (stavi se u prvu kutiju), zatim dobije 3 plava bombona i kutiju sa zelenim bombonima (stavi se u drugu kutiju). Tina dobije 4 crvena bombona (stavi se u prvu kutiju), zatim 3 plava bombona i kutiju sa zelenim bombonima (stavi se u drugu kutiju). Imaju li Tin i Tina jednaki broj bombona?"

Primjer zadatka nejednakosti: "Tin dobije 4 crvena bombona (stavi se u prvu kutiju), zatim kutiju sa zelenim bombonima (stavi se u drugu kutiju). Tina dobije 4 crvena bombona (stavi se u prvu kutiju), zatim 3 plava bombona (stavi se u drugu kutiju). Imaju li Tin i Tina jednaki broj bombona?"

Nakon što je dijete odgovorilo, eksperimentatorica je zabilježila odgovor u individualni protokol i zatražila od djeteta kratko objašnjenje odgovora. Za razliku od probnih zadataka, kod testnih zadataka djeca nisu dobila povratnu informaciju o točnosti odgovora. Procjene djece označene su kao točne ako je dijete izjavilo da Tin i Tina imaju jednaki broj bombona kada su imali, a nejednaki kada nisu imali. Ako je dijete od početka pogrešno odgovaralo, njegovi odgovori su zabilježeni kao takvi i ispitivanje je provedeno do kraja. Na individualnom protokolu nalazila se i kategorija "objašnjenje sudionika", u koju je ukratko upisano djetetovo objašnjenje.

## Rezultati

Razumijevanje principa zbrajanja operacionalizirano je kao uspješnost u zadacima koji se temelje na tim principima. Za točan odgovor na zadatak dijete dobiva 1 bod, za netočan 0 bodova. Za svaki od principa moguće je postići 3 boda. Podaci obuhvaćeni statističkom obradom prikazani su u tablici 1.

*Tablica 1*

Aritmetičke sredine i standardne devijacije rezultata za tri osnovna principa zbrajanja kod djece starosti 4 i 5 godina.

Principi zbrajanja	Dob ispitanika	M	SD	N
aditivnost	4	2.66	0.765	35
	5	2.60	0.914	35
	ukupno	2.63	0.837	70
komutativnost	4	2.40	1.006	35
	5	2.69	0.758	35
	ukupno	2.54	0.896	70
asocijativnost	4	2.43	0.948	35
	5	2.49	0.981	35
	ukupno	2.46	0.958	70

S obzirom na nacrt istraživanja, najprimjereniji postupak obrade rezultata bio bi analiza varijance s ponovljenim mjerenjima. Prije nego što smo proveli ovaj parametrijski postupak, provjerili smo normalitet distribucija rezultata Kolmogorov-Smirnovljevim testom. Pokazalo se da se distribucije rezultata statistički značajno razlikuju od normalne distribucije. Međutim, Petz (2002) navodi da uvjet normalnosti distribucije za korištenje parametrijskih metoda smije biti prekršen u slučaju da su oba uzorka jednaka, ili vrlo slična, po veličini i da distribucije imaju jednaku ili sličnu formu, tj. da su obje na jednak način asimetrične. U našem slučaju uzorci su jednake veličine ( $n=35$  za četvrogodišnjake i  $n=35$  za petogodišnjake), a sve distribucije su negativno asimetrične. Budući da su parametrijski testovi precizniji od neparametrijskih testova (čijom se primjenom gubi niz informacija) i imaju veću "snagu" (sposobnost da otkriju neku razliku, ako ta razlika doista postoji) odlučili smo se za primjenu parametrijskog postupka, za analizu varijance s ponovljenim mjerenjima.

Kako bismo mogli zajedno analizirati podatke dobivene kod djevojčica (n=36) i dječaka (n=34) potrebno je provjeriti postoji li razlika u razumijevanju osnovnih principa zbrajanja ovisno o rodu. U prijašnjim istraživanjima (Friedman, 1989; prema Vizek Vidović i sur., 2003) niti na jednom uzrastu nisu pronađene rodne razlike u razumijevanju matematičkih pojmova. Stoga niti u ovom istraživanju ne očekujemo takve razlike. Analiza varijance s ponovljenim mjerenjima pokazala je da razlike među djevojčicama i dječacima nema ( $F_{(1/68)} = 0,86$ ;  $p > 0.05$ ).

Rezultati dobiveni analizom varijance s ponovljenim mjerenjima za principe zbrajanja (što su zavisni rezultati) i dobne skupine (čiji su rezultati nezavisni) prikazani su u tablici 2.

*Tablica 2*

Rezultati analize varijance s ponovljenim mjerenjima za principe zbrajanja (zavisni rezultati) i dobne skupine (nezavisni rezultati).

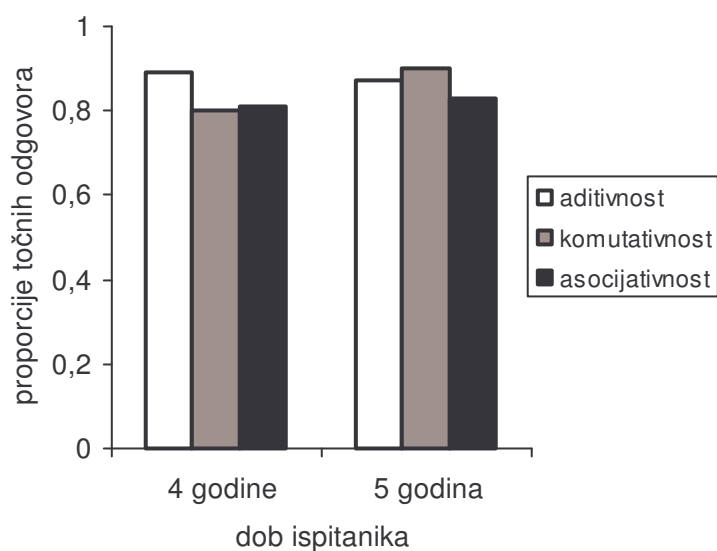
<i>Izvor varijabiliteta</i>	<i>F</i>	<i>df</i>	<i>p</i>
Principi zbrajanja	2.15	2/136	0.147
Dob	0.24	1/68	0.623
Principi zbrajanja x dob	2.23	2/136	0.140

Glavni efekt principa zbrajanja nije se pokazao značajnim ( $F_{(2/136)} = 2.15$ ;  $p > 0.05$ ), što znači da djeca jednako uspješno razumiju principe aditivnosti, komutativnosti i asocijativnosti.

Glavni efekt dobi također se nije pokazao značajnim ( $F_{(1/68)} = 0.24$ ;  $p > 0.05$ ). To nam govori da su djeca u dobi od 4 godine jednako uspješna u zadacima zbrajanja kao djeca u dobi od 5 godina.

Interakcija principa zbrajanja i dobi nije se pokazala značajnom ( $F_{(2/136)} = 2.23$ ;  $p > 0.05$ ). To znači da četverogodišnjaci jednako uspješno razumiju principe aditivnosti, komutativnosti i asocijativnosti kao i petogodišnjaci.

Proporcije točnih odgovora za osnovne principe zbrajanja prikazali smo grafički (vidi sliku 1). Vidimo da su i četverogodišnjaci i petogodišnjaci pokazali visoku uspješnost u zadacima aditivnosti, komutativnosti i asocijativnosti.



Slika 1. Proporcije točnih odgovora u zadacima koji predstavljaju osnovne principe zbrajanja (aditivnost, komutativnost i asocijativnost) kod četverogodišnjaka i petogodišnjaka.

## Rasprava

Cilj je ovog istraživanja ispitati razumijevanje osnovnih principa zbrajanja, principa aditivnosti, komutativnosti i asocijativnosti, kod vrtičke djece uz uporabu konkretnih objekata.

Očekivali smo da će djeca biti uspješnija u zadacima komutativnosti u odnosu na zadatke aditivnosti i asocijativnosti. Iz rezultata vidimo da nije pronađena razlika u razumijevanju principa aditivnosti, komutativnosti i asocijativnost kod vrtičke djece, što nije u skladu s našim očekivanjima. Nalazi iz literature (Canobi i sur., 2002) kažu da su neki principi složeniji od drugih (kao što je asocijativnost složenija od komutativnosti) i da bi djeca trebala pokazati bolje razumijevanje jednostavnijih principa. Tome u prilog govore rezultati istraživanja Canobieve i sur. (1998) koji su pokazali da je djeci bilo teže prepoznavanje i objašnjavanje aditivnosti i asocijativnosti, nego prepoznavanje i objašnjavanje komutativnosti. Razlika ovog istraživanja od našeg u tome je što su zadaci u našem istraživanju prikazani uz uporabu konkretnih objekata, a zadaci Canobieve i sur. (1998) bili su simbolički prezentirani (3+4, a ne 3 plava bombona i 4 crvena bombona).

Langford (1981; prema Canobi i sur., 1998) je ispitivao razumijevanje principa zbrajanja uz uporabu konkretnih objekata. Pronašao je da petogodišnjaci i šestogodišnjaci postižu razumijevanje komutativnost prije razumijevanja asocijativnosti. Na temelju rezultata izveo je zaključak da je razumijevanje asocijativnosti djeci zahtjevnije nego razumijevanje komutativnosti. Zamjerka ovom istraživanju je da su se djeca morala dosjetiti intervjuerovog opisa da bi mogli točno odgovoriti. U našem istraživanju, pred djecom su se za vrijeme davanja odgovora nalazili bomboni koji su podijeljeni medvjedićima. Tako se ona nisu morala oslanjati na pamćenje onoga što je intervjuer rekao i time smo izbjegli mogućnost da je dijete krivo upamtilo ili da je već zaboravilo zadatak. Zadaci asocijativnosti su kod Langforda (1981) imali više pribrojnika nego zadaci komutativnosti. Zbog toga su imali i duže opise koje su djeca trebala upamtiti. U našem istraživanju svi zadaci su imali jednaki broj pribrojnika. Time smo izbjegli mogućnost da jedna vrsta zadataka bude teža za rješavanje zato jer ima više pribrojnika u odnosu na drugu vrstu.

Očekivali smo da će petogodišnjaci biti uspješniji od četverogodišnjaka u zadacima zbrajanja. Rezultati su pokazali da su četverogodišnjaci bili jednako uspješni kao i petogodišnjaci u rješavanju zadataka zbrajanja koji su predstavljali osnovne principe zbrajanja. Rezultati nisu u skladu sa stajalištem koje zagovaraju Sophianova i McCorgrayeva (1994; prema Sophian i Vong, 1995) da su petogodišnjaci uspješniji od četverogodišnjaka zato jer razlikuju dijelove od cjeline pri rješavanju zadatka. Na slici 1, koja prikazuje stupanj uspješnosti rješavanja zadataka aditivnosti, komutativnosti i asocijativnosti kod četverogodišnjaka i petogodišnjaka, vidimo da su i jedni i drugi postigli uspješnost veću od 80%. Možemo zaključiti da su i četverogodišnjaci i petogodišnjaci pokazali veliko razumijevanje principa zbrajanja.

Očekivali smo da će četverogodišnjaci biti jednako uspješni kao i petogodišnjaci u zadacima komutativnosti, ali da će petogodišnjaci biti statistički značajno uspješniji u zadacima aditivnosti i asocijativnosti. Rezultati su pokazali da četverogodišnjaci jednako uspješno razumiju principe aditivnosti, komutativnosti i asocijativnosti kao i petogodišnjaci. To je djelomično u skladu s našim očekivanjima. Četverogodišnjaci su bili jednako uspješni kao i petogodišnjaci u zadacima komutativnosti, što je i očekivano, ali petogodišnjaci nisu bili uspješniji u zadacima aditivnosti i asocijativnosti. Sophianova i sur. (1995) smatraju da djeca već u dobi od tri godine poštuju principe zbrajanja u zadacima u kojima su upotrebljeni konkretni objekti, bez obzira na to što nisu sposobni izračunati i uspoređivati njihove količine. Njihovo je istraživanje pokazalo da već trogodišnjaci i četverogodišnjaci pokazuju visok stupanj uspješnosti u zadacima komutativnosti. Djeca su bila uspješna čak i kada je po jedan skup u svakom zadatku bio prekriven tako da djeca nisu mogla točno izračunati sume i usporediti ih. To se uklapa u protokvantitativne sheme Resnickove (1992; prema Sophian i sur., 1995), koje kažu da djeca mogu razmišljati o odnosima među objektima bez da znaju njihove točne količine. Takav način razmišljanja smatra početnim za numerički razvoj kod djece. Naši rezultati su u skladu s tim jer su i četverogodišnjaci, bez obzira na to što nisu mogli izračunati i uspoređivati količine, pokazali da poštuju principe zbrajanja u zadacima s konkretnim objektima jer su postigli veliku uspješnost u zadacima aditivnosti, komutativnosti i asocijativnosti.

Canobieva i sur. (2002) također su ispitivali dječje razumijevanje principa aditivnosti, komutativnosti i asocijativnosti uz uporabu konkretnih objekata. Rezultati

su pokazali da su i predškolci i osnovnoškolci bili uspješniji u zadacima komutativnosti, nego u zadacima asocijativnosti. Navedeni rezultati nisu u skladu s našima kod kojih su i četverogodišnjaci i petogodišnjaci pokazali jednaku uspješnost u zadacima asocijativnosti i zadacima komutativnosti. Rezultati istraživanja Canobieve i sur. (2002) pokazali su i da su starija djeca (osnovnoškolci) pokazala bolje razumijevanje principa aditivnosti u odnosu na mlađu djecu (predškolci). Rezultati našeg istraživanja su pokazali da su četverogodišnjaci bili jednako uspješni kao petogodišnjaci u zadacima aditivnosti. Budući da se ne radi o istim dobnim skupinama osvrnut ćemo se na uspješnost rješavanja zadataka da utvrdimo nisu li možda sudionici istraživanja Canobieve i sur. (2002), koji su bili stariji, pokazali veću točnost na zadacima. Prosječna uspješnost djece na zadacima kod Canobieve i sur. (2002) iznosila je 64% dok je u našem istraživanju iznosila preko 80% (vidi sliku 1). Iako su djeca iz našeg istraživanja bila mlađa od djece iz navedenog istraživanja, postigla su veću točnost na zadacima. Izgleda da djeca već u dobi od 4 i 5 godina imaju bogato znanje o pravilima po kojima se grupe predmeta mogu sastavljati i rastavljati. Ovo je u skladu s Resnickovom (1992, 1994; prema Canobi i sur., 2002) koja smatra da se dječje razumijevanje dio-cjelina pojmova, temeljnih za školsku aritmetiku, razvija kroz njihovo iskustvo s konkretnim objektima. Naši rezultati idu u prilog tome. Nalazi iz literature (Canobi i sur., 1998) su također pokazali visoku uspješnost kod rješavanja zadataka sa po tri pribrojnika, kao što je bio slučaj kod nas. Rezultati Canobieve i sur. (1998) su pokazali prosječnu točnost od 73% za tu vrstu zadataka. Kao što smo naveli, zadaci ovih istraživača nisu prikazani korištenjem konkretnih objekata, već simbolički, pa time objašnjavamo veću uspješnost sudionika našeg istraživanja.

Tako veliku uspješnost u svim principima zbrajanja nadalje možemo objasniti time da djeca nisu morala zbrajati da bi dala odgovor. Od njih se nije tražilo da izračunaju sume za svaki zadatak tako da nisu bili pod pritiskom da moraju točno izračunati rješenje. Zatim, djeca su direktno pitana imaju li zadaci isti zbroj ("Imaju li Tin i Tina jednaki broj bombona?"). Time je razumijevanje principa neposredno procijenjeno, a ne posredno preko strategija zbrajanja, koje stoje u nedovoljno jasnom odnosu s principima zbrajanja. Osim toga uspješnost na zadatku nije ovisila o brzini odgovora kao u nekim ranijim istraživanjima (Langford, 1981; Baroody i Gannon, 1984; prema Cowan i Renton, 1996), tako da nisu isključena djeca koja su sprije

odgovarala. U ranijim istraživanjima su isključena da se spriječi da u obradu uđu rezultati djece koja su izračunavala zbroj pa tako uspoređivala zadatke. Mi smo to spriječili time što su djeca znala da postoje po 4 crvena bombona i 3 plava bombona, ali puno zelenih bombona.

Rezultate našeg istraživanja najprimjerenije je objasniti u skladu s objašnjenjem razvoja pojmova koji nudi Resnickova (1991; prema Canobi, 2002), a koje je prikazano na principu komutativnosti u tablici 1. Ona navodi da razvoj pojmova započinje kao dječja mapa novog oblika razumijevanja. Početna razina razumijevanja je protokvantitativna dio-cjelina shema (jabuke + naranče = naranče + jabuke). Točnije, ona kaže da djeca mogu razumjeti komutativnost i asocijativnost u terminima kako se fizički objekti mogu udružiti, a ključni trenutak za razvoj je kada se takvo njihovo znanje kombinira sa dio-cjelina shemom (znanjem da se cjelina sastoji od dijelova). Tada djeca mogu zaključivati da su  $2 \text{ jabuke} + 3 \text{ jabuke} = 3 \text{ jabuke} + 2 \text{ jabuke}$  (kvantitativna razina). Budući da su naši sudionici pokazali veliko razumijevanje sva tri principa zbrajanja, dakle i da se cjelina sastoji od dijelova i da ti dijelovi mogu mijenjati redoslijed i da se mogu grupirati na različite načine, možemo zaključiti da su oni postigli protokvantitativnu, ali i kvantitativnu razinu razvoja. Naši rezultati potvrđuju stajalište Resnickove (1992, prema Canobi i sur. 2002) da se principi zbrajanja ne razvijaju odvojeno. Ona tvrdi da asocijativnost i komutativnost nisu odvojeni principi u dječjem razumijevanju, već da se asocijativnost i komutativnost nastavljaju na već usvojenu aditivnost. Budući da su principi zbrajanja bili prikazani uz korištenje konkretnih objekata, sudionicima našeg istraživanja bilo je omogućeno da tako razumiju sva tri principa. Predlažemo daljnju kvalitativnu analizu odgovora, koja nije bila dio ovog istraživanja, da se utvrdi način razmišljanja djece pri odgovaranju, odnosno jesu li doista postigli tako veliko razumijevanje principa zbrajanja kao što govori uspješnost u zadacima koja je veća od 80%.

Dakle, rezultati dobiveni ispitivanjem razumijevanja osnovnih principa zbrajanja u kontekstu konkretnih objekata kod vrtičke djece pokazali su da nije pronađena razlika u razumijevanju tri principa zbrajanja, odnosno da djeca podjednako dobro razumiju i aditivnosti i komutativnost i asocijativnost. Rezultati su također pokazali da nije pronađena razlika u razumijevanju osnovnih principa zbrajanja između četverogodišnjaka i petogodišnjaka. Interakcija principa zbrajanja i dobi nije se



pokazala značajnom. Djeca su pokazala visoku uspješnost u rješavanju zadataka za sva tri navedena principa zbrajanja. To nam pokazuje da djeca te dobi imaju bogato znanje o pravilima na koje se načine grupe objekata mogu udruživati i razdvajati te da su usvojili dio-cjelina znanje, temeljno za školsku aritmetiku.

### *Praktične implikacije*

Mnoga djeca pokazuju iznenađujuće dobro razumijevanje principa zbrajanja kada se koriste konkretni objekti već prije nego što krenu u školu. Nažalost, školsko poučavanje često zanemaruje da djeca već imaju određeno iskustvo stečeno u svakodnevnom životu. Zbog nepovezanosti takvih metoda sa svakodnevnom životom djeca misle da je matematika nešto apstraktno i neprimjenjivo u svakodnevnim situacijama. Vlahović-Štetić i Vizek Vidović (1998) navode da učenje aritmetike najčešće počinje brojčanim zadacima u kojima se djeca susreću s izrazima poput "2+3=". Iz razgovora s prvoškolcima saznaje se da se oni tada pitaju: "čega dva" i "čega tri". Kada bi se djecu pitalo: "Ako imaš dva bombona i dobiješ još tri, koliko ćeš tada bombona imati?", ona bi vjerojatno znala odgovor. I ne samo da djeca na temelju svog predškolskog iskustva znaju zbrajati, ona znaju i oduzimati pa čak točno rješavaju i zadatke koji podrazumijevaju operaciju množenja. To bi, na primjer, bio zadatak: "Koliko ušiju imaju tri zeca?" Djeci je potrebno omogućiti što veći dodir s konkretnim materijalima, onakvima s kojima se susreću u svojoj svakodnevnici. Prema Vlahović-Štetić i Vizek Vidović (1998), učenje aritmetike koje polazi od zadataka vrste "3+2" ne nadograđuje se na temelje matematičkog razmišljanja postavljene u ranom djetinjstvu. Umjesto toga, počinje se graditi jedan posve novi sustav, a pritom se često odašilje poruka kako je matematika izvan školske učionice "nešto drugo" od matematike u školi. Zbog toga je važno razviti metode poučavanja koje će povezivati već usvojeno dječje znanje i načine rješavanja problema koji se uče u školi. S jedne strane, moći će tako primijeniti ono što već znaju na školske matematičke probleme. A s druge strane, djeca neće smatrati da je ono što uče u školi različito od svakodnevnog života i da se u njemu ne može primijeniti.

## **Zaključak**

Rezultati su pokazali da nije pronađena razlika u razumijevanju principa aditivnosti, komutativnosti i asocijativnost kod vrtičke djece. To je u skladu sa stajalištem Resnickove (1991; prema Canobi, 2002) koja smatra da se principi zbrajanja ne razvijaju odvojeno. Rezultati su nadalje pokazali da nije pronađena razlika između četverogodišnjaka i petogodišnjaka u razumijevanju osnovnih principa zbrajanja. To je u skladu s nalazima Sophianove i sur. (1995) koji smatraju da djeca već u dobi od tri godine poštuju principe zbrajanja u zadacima u kojima se koriste konkretni objekti, bez obzira na to što nisu sposobni izračunati i uspoređivati njihove količine. Nalazi se nadalje uklapaju u protokvantitativne sheme Resnickove (1992; prema Sophian i sur., 1995), prema kojima djeca mogu razmišljati o odnosima među objektima bez da znaju njihove točne količine. Takav način razmišljanja smatra početnim za numerički razvoj kod djece. I četverogodišnjaci i petogodišnjaci su pokazali visoku uspješnost u zadacima koji su predstavljali osnovne principe zbrajanja.

## Literatura

- Baroody, A.J., i Dowker, A. (2003). *The development of arithmetic concepts and skills: constructive adaptive expertise*. Mathematical thinking and learning. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum.
- Baroody, A.J. i Gannon, K.E. (1984). The development of the commutativity principle and economical addition strategies. *Cognition and Instruction*, 1(3), 321-339.
- Canobi, K.H., Reeve, R.A. i Pattison, P.E. (2002). Young children's understanding of addition concepts. *Educational Psychology*, 22(5), 513-532.
- Canobi, K.H., Reeve, R.A. i Pattison, P.E. (1998). The role of conceptual understanding in children's addition problem solving. *Developmental Psychology*, 34(5), 882-891.
- Cowan, R. i Martins-Mourao, A. (1998). The emergence of additive composition of number. *Educational Psychology*, 18(4), 377-389.
- Cowan, R. i Renton, M. (1996). Do they know what they are doing? Children's use of economical addition strategies and knowledge of commutativity. *Educational Psychology*, 407-420.
- Fox, R. (2005). *Teaching and learning: Lessons from psychology*. Malden, MA: Blackwell Pub.
- Petz, B. (2002). *Osnovne statističke metode za nematematičare*. Jatrebarsko: Naklada Slap.
- Rittle-Johnson, B. i Siegler, R.S. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. U C. Donlan (Eds), *The development of mathematical skills* (pp.). Hove, East Sussex England: Psychology Press.
- Sophian, C., Harley, H. i Manos Martin, C.S. (1995). Relational and representational aspects of early number development. *Cognition and Instruction*, 13(2), 253-268.
- Sophian, C. i Vong, K.I. (1995). The parts and wholes of arithmetic story problems: developing knowledge in the preschool years. *Cognition and Instruction*, 13(3), 469-477.
- Vasta, R., Haith, M.M. i Miller, S.A. (1998). *Dječja psihologija*. Jastrebarsko: Naklada Slap.
- Vizek Vidović, V., Rijavec, M., Vlahović Štetić, V. i Miljković, D. (2003). *Psihologija obrazovanja*. Zagreb: IEP : VERN

Vlahović Štetić, V. i Vizek Vidović, V. (1998). *Kladim se da možeš...- psihološki aspekti početnog poučavanja matematike – priručnik za učitelje*. Zagreb: Udruga roditelja “Korak po korak”