

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FILOZOFSKI FAKULTET
ODSJEK ZA PSIHOLOGIJU

DIPLOMSKI RAD:

OSNOVNI PRINCIPI ZBRAJANJA KOD PREDŠKOLSKE DJECE I
UČENIKA PRVOG RAZREDA OSNOVNE ŠKOLE

Mentor:
dr.sc. Vesna Vlahović-Štetić

MARIJA GLIHA
rujan, 2004

SADRŽAJ :

| | |
|---|-----------|
| 1. UVOD | 3 |
| 1.1 INTEGRACIJA PROCEDURALNOG I KONCEPTUALNOG ZNANJA | 3 |
| 1.1.1 RAZVOJ PROCEDURALNOG I KONCEPTUALNOG ZNANJA | 5 |
| 1.1.2 ZAKLJUČCI O POVEZANOSTI PROCEDURALNOG I KONCEPTUALNOG ZNANJA | 6 |
| 1.2 PROMJENE U ZNANJU KOMBINACIJA, STRATEGIJA I PRINCIPA ZBRAJANJA KOD DJECE | 6 |
| 1.2.1 OSNOVNE KOMBINACIJE ZBRAJANJA | 7 |
| 1.2.2 STRATEGIJE ZBRAJANJA | 8 |
| 1.2.3 PRINCIPI ZBRAJANJA | 10 |
| 2. PROBLEMI | 21 |
| 3. METODOLOGIJA | 22 |
| 3.1 SUDIONICI | 22 |
| 3.2 PRIBOR | 22 |
| 3.3 POSTUPAK | 21 |
| 4. REZULTATI | 26 |
| 5. RASPRAVA | 29 |
| 6. ZAKLJUČAK | 37 |
| 7. SAŽETAK | 38 |
| 8. LITERATURA | 39 |
| 9. PRILOZI | 42 |

1. UVOD

Gledajući daleko u prošlost pa sve do danas smatralo se da je najbolji način svladavanja školske aritmetike kroz poučavanje i vježbu. Primjerice, bilo da su osnovni matematički pojmovi prezentirani na glinenoj ploči ili u tiskanoj tablici, cilj tradicionalnog poučavanja bio je isti, a to je naučiti ih "napamet".

Tijekom povijesti kritičari tradicionalnog pristupa predlažući nove reforme naišli su na otpor. Neke od predloženih reformi bile su da učitelji podupiru djecu u otkrivanju i razumijevanju veza među različitim zadacima te smišljanju različitih postupaka za rješavanje zadataka. No međutim, kritičari modernog pristupa postavljaju pitanje: "Zašto je to važno kad učenici jednostavno mogu naučiti "napamet" standardne i već poznate efikasne metode?" Tako je npr. kolumnist Thomas Sowell rekao: "...Većina nas neće otkriti ništa značajno što dosad već nije otkriveno..." Postavlja se pitanje koji je od navedena dva pristupa valjaniji ?!

Koja je osnova aritmetičkog znanja i koji je najbolji način poučavanja aritmetike predmet je rasprave među zagovornicima tradicionalnog i modernog pristupa, no odgovor je očito složen.

1.1. INTEGRACIJA PROCEDURALNOG I KONCEPTUALNOG ZNANJA

Stručnjaci zainteresirani za usavršavanje poučavanja matematike dugo su bili zabrinuti neučinkovitim, iako ne štetnim načinima kojima su zagovornici tradicionalnog pristupa poučavali matematiku. Primjeri poučavanja matematike sa izrazito različitim posljedicama kroz koje se očituje razlika između tradicionalnog i modernog pristupa su:

Primjer 1: nefleksibilno mehaničko učenje

Wertheimer (1949/1959, prema Baroody i Dowker, 2003) opisao je posjet jednom razredu koji su upravo učili kako odrediti površinu paralelograma. Učenicima je rečeno da to mogu odrediti na način da izmjere širinu i visinu baze paralelograma, te pomnože te dvije vrijednosti.

Gledajući kako su uspješno riješili nekoliko vrlo sličnih zadataka, Werthaimer je uz dopuštenje učitelja postavio učenicima zadatak sličan prethodnim, samo što je paralelogram nacrtan okomito, a ne vodoravno kao što su oni dotad rješavali. Nekoliko učenika je bezuspješno pokušavalo riješiti zadatak, dok su ostali rekli kako to još nisu učili.

Ukratko, opisani način poučavanja nije omogućio učenicima da primjene svoje znanje na djelomice drugačijim zadacima.

Primjer 2: fleksibilno primjenjeno znanje

Ana, učenica četvrtog razreda imala je zadatak podijeliti 901 sa 2. Nakon što je to učinila, dobila je da rezultat iznosi 450 i ostatak 1. Iako još nisu učili kako provjeriti je li dobiveni rezultat točan, ona je to uspjela provjeriti. S obzirom da su nekoliko mjeseci ranije učili da se oduzimanje može provjeriti tako da dobivenoj razlici dodaju umanjitelja, te njihov zbroj treba odgovarati umanjeniku, ona je upotrijebila princip za provjeru oduzimanja na provjeru u zadatku dijeljenja. Umjesto da koristi inverznu operaciju množenja (450×2), ona je svoj rezultat provjerila korištenjem njegovog matematičkog ekvivalenta odnosno zbrojila je $450 + 450$ i dobila 900, te imala još ostatak 1.

S obzirom da je Ana shvatila racionalu za provjeru oduzimanja, uočila je da se taj princip može primjeniti i na povezane, ali različite zadatke za provjeru rezultata dijeljenja.

Ukratko, njeno razumijevanje omogućuje joj fleksibilno korištenje naučenog postupka, stoga on može biti korišten i u novom kontekstu.

Primjer 1. ilustrira ono što Hatano (1988, prema Baroody i Dowker, 2003) naziva "rutinskim znanjem", znanjem naučenim "napamet", odnosno znanjem koje može biti efikasno primjenjeno samo na vrlo sličnim, ali ne i na novim zadacima. Dok primjer 2. ilustrira ono što on naziva "adaptivnim znanjem", odnosno znanjem koje može biti primijenjeno ne samo na slične, već i na različite zadatke. U suprotnosti sa rutinskim znanjem koje je naučeno i pohranjeno odvojeno od drugih znanja, adaptivno znanje je

naučeno i pohranjeno povezivanjem sa drugim znanjima.

Istraživači koji su zainteresirani za poučavanje aritmetike prave razliku između rutinskog i adaptivnog znanja. U početku je poučavanje bilo izjednačeno sa vještinama računanja i proceduralnim znanjem, a kasnije više sa razumijevanjem i konceptualnim znanjem.

1.1.1. RAZVOJ PROCEDURALNOG I KONCEPTUALNOG ZNANJA

Krajem dvadesetog stoljeća raspravljalo se o razvojnom slijedu proceduralnog i konceptualnog znanja. Četiri su pristupa kako vještine i koncepti mogu biti povezani. Bihevioristički orijentirani istraživači smatrali su da razvoj matematičkih vještina prethodi i leži u osnovi razvoja koncepata. Kroz primjenu tih vještina djeca otkrivaju pravila i koncepte aritmetike. Tako primjerice, učitelj može naučiti dijete da počne brojati od većeg brojnika (npr. $2+4$: "4,5,6"), a dijete koristeći tu metodu da izračuna zbroj može otkriti da i $2+4$ i $4+2$ imaju jednak zbroj te da redoslijed pribrojnika ne utječe na krajnji rezultat (princip komutativnosti). Za razliku od biheviorista, kognitivno orijentirani istraživači smatrali su da konceptualno znanje prethodi proceduralnom znanju te dovodi do učenja vještina. Tako primjerice, razumijevanje komutativnosti omogućuje djeci da otkriju neku od strategija zbrajanja. Još jedan od pristupa predložili su Baroody i Gingsburg (1986), oni su smatrali da postoji interakcijsko djelovanje između vještina i koncepata. Prema njihovom shvaćanju, konceptualno znanje može dovesti do boljeg razumijevanja proceduralnog znanja, a primjena proceduralnog znanja može dovesti opet do boljeg shvaćanja koncepata, i tako dalje. Primjerice, djeca koriste svoje konceptualno znanje kako bi konstruirala konkretne strategije zbrajanja, zatim iskustvo računanja korištenjem osnovnih strategija zbrajanja može dovesti do uvida o razvoju nekih naprednijih strategija, a njihovo korištenje zatim može dovesti do razumijevanja principa komutativnosti... I na kraju, Rittle-Johnson i Siegler (1998) smatraju da se proceduralno i konceptualno znanje razvijaju paralelno. Tako primjerice, razvoj neke konkretne strategije zbrajanja isprepleten je i nedjeljiv od razvoja principa komutativnosti.

1.1.2. ZAKLJUČCI O POVEZANOSTI KONCEPTUALNOG I PROCEDURALNOG ZNANJA

Rittle-Johnson i Siegler (1998) uočili su da rezultati dosadašnjih istraživanja velikim dijelom idu u prilog pristupima koji smatraju da se prvo razvija ili proceduralno ili konceptualno znanje. A razlog tomu su teškoće u ispitivanju pristupa koji smatraju da se radi o interakcijskom ili simultanom razvoju vještina i koncepata.

Hiebert i Lefevre (1986, prema Baroody i Dowker, 2003) definirali su proceduralno znanje kao znanje "kako da", a konceptualno znanje kao znanje "zašto", te iznijeli tri zaključka koja se odnose na povezanost vještina i koncepata, a idu u prilog interakcijskom ili simultanom pristupu:

1. Budući da prema definiciji konceptualno znanje uključuje međusobno povezano i smisleno znanje, proceduralno znanje može i ne mora biti povezano s drugim znanjima odnosno može, a i ne mora imati smisao.
2. U nekim slučajevima razlika između navedena dva tipa znanja može biti nejasna.
3. Povezivanje konceptualnog i proceduralnog znanja može imati velike koristi na stjecanje i primjenu kako konceptualnog, tako i proceduralnog znanja.

1.2. PROMJENE U ZNANJU KOMBINACIJA, STRATEGIJA I PRINCIPA ZBRAJANJA KOD DJECE

U posljednjoj četvrtini 20.stoljeća dramatično se promijenio pristup psihologa matematičkim sposobnostima djece. Prema tradicionalnim shvaćanjima predškolska djeca imaju vrlo malo matematičkog znanja i sposobnosti. Tako je poznati teoretičar učenja Thorndike smatrao da su djeca prije sedme godine sposobna steći samo malo više od rutinskog znanja u tom području. No međutim, nedavna istraživanja pokazala su da usvajanje matematičkih pojmova počinje vrlo rano. Već u ranoj predškolskoj dobi djeca stječu znanja vezana uz skupove, zbrajanje i oduzimanje, mjerenje. Neka istraživanja govore i o uočavanju jednakosti ili razlika među malim skupovima već kod šestomjesečnih beba (Klein i Starkey, 1987; prema Vizek-Vidović i sur., 2003). U nastavku će biti opisane tri ključne komponente zbrajanja:

osnovne kombinacije zbrajanja, strategije zbrajanja, te principi zbrajanja.

1.2.1. OSNOVNE KOMBINACIJE ZBRAJANJA

U početku je cilj učenja osnovne aritmetike bio razviti brzo i točno rješavanje zadataka iz tog područja. Učitelji matematike smatrali su da to ovisi o količini činjeničnog znanja iz područja aritmetike (npr. znanje zbrojeva znamenki od 0 do 9).

Rana istraživanja bila su usmjerena na određivanje razumiju li se neke činjenice bolje od drugih i zašto. U okviru toga rani istraživači utvrdili su da težina zadatka zbrajanja raste sa veličinom zbroja. Wheeler i Murray (1935, prema Baroody i Dowker, 2003) u svojim studijama utvrdili su kako raste veličina manjeg pribrojnika u nekom zbroju tako ti zadaci postaju djeci sve teži. Primjerice, djeci će biti lakše izračunati zbroj $8 + 3$, nego $8 + 6$. No, treba istaknuti da se kod zbrajanja istih pribrojnika (npr. $5 + 5$) također pokazuje taj efekt veličine, ali generalno gledajući takve kombinacije su lakše nego što bi se očekivalo s obzirom na njihovu veličinu. Istraživanja nisu pokazala dosljedne rezultate o utvrđivanju težine zadatka zbrajanja nekog pribrojnika sa 0. Drugim riječima, neka istraživanja su pokazala da je zbrajanje sa nulom kombinacija koja se najlakše pamti, dok su druga istraživanja pokazala suprotno.

Baroody (1985) je utvrdio da težina kombinacija zbrajanja može biti pod utjecajem nekoliko različitih faktora i to:

- a) metodoloških razlika, b) razlika u poučavanju, c) količine vježbe, d) asocijativnog olakšanja ili interferencije te e) računskih pogrešaka.

A ako postoje razlike u svladavanju kombinacija zbrajanja među djecom, čak i onda kada je kontrolirana količina vježbe, tada to možemo pripisati nekom od sljedećih kognitivnih faktora:

a) radnom pamćenju - Geary (1993, prema Baroody i Dowker, 2003) je smatrao da prilikom učenja operacije zbrajanja vježba može biti neefikasna ako dijete zaboravi pribrojnike prije nego dođe do rješenja. To može ukazivati na mali kapacitet radnog pamćenja, odnosno da ili sporo rješavanje zadatka ili neefikasne strategije postavljaju prevelike zahtjeve na njihovo radno pamćenje.

b) numeričkim pravilima – još jedan od faktora koji ukazuje da vježba može biti

neefikasna prilikom učenja zbrajanja je neuspjeh u prepoznavanju zakonitosti i veza među različitim zadacima, a to može biti pod utjecajem količine postojećeg konceptualnog znanja. Što dijete ima više konceptualnog znanja imati će više uspjeha u prepoznavanju zakonitosti i veza među različitim zadacima.

1.2.2. STRATEGIJE ZBRAJANJA

Pod pojmom strategije podrazumijevamo namjerni postupak pomoću kojeg želimo ostvariti neki cilj, odnosno riješiti problem (prema Siegler i Jenkins, 1989). Za razliku od nestrategičkog ponašanja, kao što je nasumično pogađanje rješenja, ili pak automatsko dozivanje neke činjenice iz dugoročnog pamćenja, strateško ponašanje uključuje prepoznavanje cilja, te izbor sredstava kojima se taj cilj može ostvariti.

Razvoj strategija zbrajanja kreće se u dva pravca. S jedne se strane povećava činjenično i pojmovno znanje. Mi znamo da je $6 + 3 = 9$ i s vremenom postajemo sigurniji i točniji pri dosjećanju ili pak postajemo sve sigurniji u princip komutativnosti zbrajanja. Pokazalo se da se činjenično znanje utvrđuje ovisno o mehanizmima koji učvršćuju asocijativnu vezu među činjenicama. Tako će dijete, budući da se češće sreće sa zadacima tipa $n+1$, jer počivaju na brojenju, bolje zapamtiti rezultate takvih zadataka. Kao što je već spomenuto isto se tako lakše pamti zbrajanje istih pribrojnika.

Povećanje činjeničnog znanja smanjuje potrebu za uporabom strategija. Jednom kad dijete zapamti da je $2 + 2 = 4$, nema više potrebu koristiti strategiju prebrojavanja prstiju. S druge strane u zadacima koje ne može riješiti dozivanjem rezultata iz dugoročnog pamćenja uočavaju se promjene u postupcima kojima se do rezultata dolazi u smislu sve veće ekonomičnosti. Pri tom se pokazalo da ni djeca ni odrasli sustavno ne rabe samo jednu strategiju.

Primjerice, ako računamo pod vremenskim pritiskom više ćemo se oslanjati na dosjećanje gotovih činjenica riskirajući pogrešku uslijed mogućeg zaboravljanja točnog odgovora. Ako nam je pak važno da dođemo do što točnijeg rezultata ponašati ćemo se drukčije – uporabiti ćemo strategiju računanja za koju smo posve sigurni da će nas dovesti do točnog rezultata, iako je vremenski neekonomična.

Budući da je činjenično znanje predškolske djece ograničeno, ona se pri brojenju i

jednostavnom računanju moraju koristiti jednostavnim strategijama koje počivaju na brojenju unaprijed. Strategije zbrajanja kod djece predškolske i rane školske dobi su sljedeće:

1. Prebrojavanje svih članova u skupu. Da bi riješilo zadatak $3 + 5$ dijete podiže tri prsta, zatim pet i broji izgovarajući : “1,2,3,4,5,6,7,8”.
2. Nastavljanje brojenja od prvog pribrojnika. Dijete rješava isti zadatak ($3 + 5$) tako da odmah digne tri prsta i nastavi podizati još pet prstiju po jedan uz odbrojavanje: “4,5,6,7,8”
3. Strategija pribrajanja manjeg. Ova strategija predstavlja znatan napredak u smislu sve veće ekonomičnosti računanja. Zadatak $3 + 5$ dijete koje rabi ovu strategiju riješit će tako da digne pet prstiju, tj. počinje od većeg pribrojnika i nastavlja dodavati još tri prsta odbrojavajući: “6,7,8”. Primjena ove strategije pokazuje da je dijete shvatilo načelo kardinalnosti i reverzibilnosti.
4. Kombinacija dosjećanja i strategije. Kad se prijeđe na računanje s većim brojevima, istodobno se koriste i činjenično znanje i strategije. Primjerice, djeca i odrasli ponekad zbrajaju $7 + 9$ tako da jedan pribrojnik rastave na $7 + 2$, automatski iz sjećanja povuku rezultat $7 + 7 = 14$ i zatim, rabeći strategiju pribrojavanja manjeg, dodaju 2.
5. Strategija dosjećanja u kojoj se dozove informacija iz dugoročnog pamćenja. Primjerice, dijete odmah odgovori da je $7 + 9 = 16$.

Istraživanja su pokazala da se većina djece do 9 godina najčešće pri zbrajanju služi strategijama pribrojavanja manjeg broja. Strategija pribrojavanja manjeg ovisi i o shvaćanju principa aditivnosti i komutativnosti.

Većini djece su ove strategije pri ulasku u školu dostupne, što znači da ih rabe spontano ili ih mogu bez većih poteškoća primijeniti kad ih se na to upozori (Aschkraft, 1990; prema Vlahović-Štetić i Vizek-Vidović, 1998).

1.2.3. PRINCIPI ZBRAJANJA

Zbrajanje uključuje principe različitih dosega. Jedan generalan i vrlo jednostavan princip je da "zbrajanje čini više". Taj princip se odnosi i na prirodne brojeve (pozitivne cijele brojeve 1,2,3,4,5...) i na zbrajanje bilo kojih opsežnijih količina (npr. količina koje predstavljaju mjeru dimenzija kao što su dužina, masa i volumen). Na apstraktnoj razini brojevni sustav određen je svojstvima kao što su aditivnost, komutativnost i asocijativnost. Principi kao što su aditivnost, komutativnost i asocijativnost osnovna su svojstva zbrajanja. Glavni cilj dosadašnjih istraživanja bio je ispitati da li rješavanje zadataka zbrajanja kod djece podrazumijeva shvaćanje tih principa. Imajući u vidu ta istraživanja treba imati na umu da djeca mogu a) usvojiti postupke koji poštuju te principe bez njihova razumijevanja i b) mogu poznavati te principe, a da ih ne mogu primjeniti u određenom kontekstu. Osim navedenog, istraživanja redosljeda po kojem djeca uče o principima omogućuje bolje razumijevanje razvoja dio-cjelina znanja (znanje koje se odnosi na to da se bilo koja količina (dakle cjelina) može razdijeliti u dijelove) . Također su potrebna istraživanja o razumijevanju tih principa kod djece s ciljem da se razumije važnost i razvoj konceptualnog znanja zbrajanja. No, unatoč istaknutosti tih principa u ključnim teorijama o matematičkom razvoju, malo se zna o tome kako djeca uče o njima.

“ZBRAJANJE ČINI VIŠE”

Dokazi za ranu sposobnost

Starkey (1992) je ispitao razumijevanje zbrajanja i oduzimanja kod predškolske djece koristeći neverbalne odgovore. Ispitanici su bila djeca u dobi od 18 mjeseci do 5 godina. Prvi zadatak ispitanika bio je staviti lopte u jednu neprozirnu kutiju, zatim su gledali je li eksperimentator dodavao ili oduzimao lopte od početnog broja lopti koje je sam ispitanik stavio u kutiju. Nakon toga ispitanik je trebao izvaditi jednu po jednu loptu iz neprozirne kutije, a broj pokušaja kojim je on posegnuo za loptom u kutiji pokazivao je koliko je lopti očekivao da se nalazi u kutiji. Većina dvogodišnje djece više je puta posezala za loptom nakon dodavanja, a manje nakon oduzimanja. Uglavnom, broj puta kojim je dijete pokušalo posegnuti za loptom točno je odgovaralo broju lopti koliko ih je bilo u kutiji.

Uspjeh u zadacima se smanjivao kako se početna količina lopti povećavala. Za zadatke zbrajanja postotak točnih odgovora je pao sa 55% za 2+1 (dvije lopte na početku + jedna lopta koju je dodao eksperimentator) na 15% za 3+1 (tri lopte na početku + jedna lopta koju je dodao eksperimentator). Osim toga, istraživanje je pokazalo da su zadaci sa oduzimanjem bili lakši od onih sa zbrajanjem, ali je uspjeh u zadacima oduzimanja također pao sa 91% za 2-1 (dvije lopte na početku – jedna lopta koju je eksperimentator oduzeo) na 52% za 3-1 (tri lopte na početku – jedna lopta koju je eksperimentator oduzeo). S obzirom da rezultati ovog i sličnih istraživanja (Starkey, Spelke i Gelman, 1990; prema Baroody i Dowker, 2003) nisu konzistentni, potrebna su daljnja istraživanja kako bi se mogli donijeti neki zaključci.

Dokazi za stariju predškolsku djecu

Postoje dokazi da kod neke starije predškolske djece sposobnost neverbalnog zbrajanja odnosno zbrajanja korištenjem neverbalnih odgovora kao primjerice u prethodno opisanom istraživanju Starkeya (1992) reflektira princip "zbrajanje čini više" (Huttenlocher i sur., 1994; prema Baroody i Dowker, 2003). Općenito, te studije ukazuju da su mlađa djeca puno uspješnija na neverbalnim zadacima zbrajanja nego na verbalno prezentiranim problemskim zadacima (npr. Petar ima tri jabuke. Ana je Petru dala još pet jabuka. Koliko sada Petar ima jabuka?) ili na simbolički izraženim zadacima (Koliko je 3 + 5?) .

Dowker i Cowan (prema Baroody i Dowker, 2003) pronašli su dokaze koji su u skladu sa pristupom da se verbalno zbrajanje razvija kasnije od neverbalnog zbrajanja te da ovisi o vještinama brojanja. Rezultati nekih istraživanja pokazali su da oni koji nisu vješti u brojanju pokazuju i slabiji uspjeh u zadacima zbrajanja.

ZATVORENOST I ADITIVNOST

Zbrajanje prirodnih brojeva ima svojstvo zatvorenosti jer je zbroj bilo kojeg skupa prirodnih brojeva i sam prirodan broj. Jasna posljedica toga je da je bilo koji prirodan broj, osim broja 1, zbroj drugih prirodnih brojeva. Resnick (1986, prema Baroody i Dowker, 2003) smatrala je da djeca već u ranoj dobi shvaćaju to svojstvo zatvorenosti odnosno shvaćaju princip aditivnosti koji se simbolički može izraziti kao $(a+b)+c=a+b+c$. Znanje aditivnosti podrazumijeva se pri korištenju strategije razdvajanja za rješavanje

zadataka zbrajanja (npr. rješavanje zadatka $28 + 15$ rješavanjem $20 + 8 + 10 + 5$). Korištenje strategije razdvajanja kod djece nije uobičajeno, ali to ne mora biti rezultat nerazumijevanja principa aditivnosti. Djeca koriste niz valjanih strategija za rješavanje zadataka zbrajanja. Korištenje jedne, ne isključuje sposobnost korištenja druge. Renton (1992, prema Baroody i Dowker, 2003) je pokušala utvrditi koje sve strategije zbrajanja djeca koriste, tako da je tražila od djece (u dobi od 6-10 god.) nakon što su riješili neke zadatke zbrajanja, da objasne koje strategije su koristili tijekom rješavanja tih zadataka. Rezultati su pokazali da je samo jedno dijete mlađe od 8 godina i nekoliko starijih koristilo strategiju razdvajanja. No međutim, potrebna su dodatna istraživanja kako bi se utvrdilo da li dobiveni rezultati ukazuju da li je problem sa razumijevanjem principa aditivnosti povezan sa razumijevanjem strategije razdvajanja ili samo sa primjenom te strategije.

Putnam, deBettencourt i Leinhardt (1990, prema Baroody i Dowker, 2003) ispitali su razumijevanje strategije razdvajanja tako da su tražili od djece da dopune objašnjenje lutke o načinu na koji je lutka rješavala zadatke, a rješavala je zadatke zbrajanja i oduzimanja koristeći strategiju razdvajanja. To ukazuje mogu li djeca operacionalizirati strategiju razdvajanja za određene zbrojeve, odnosno imaju li implicitno znanje o aditivnosti. Potrebno je istražiti da li se to implicitno znanje principa razvija prije, istovremeno ili kasnije od eksplicitnog znanja aditivnosti.

Osim strategije razdvajanja, znanje principa aditivnosti ispitano je još uz pomoć složenijih problemskih zadataka kao npr. Petar ima nekoliko pikula. Ivan je dao Petru još 5 pikula. Sada Petar ima 8 pikula. Koliko je pikula imao Petar na početku? Ovu vrstu zadataka nije uspjela savladati većina djece prije drugog razreda, ali naprotiv čak su i djeca u vrtiću uspješno rješavala jednostavnije zadatke kao što su npr. Petar ima 3 pikule. Ivan je Petru dao još 5 pikula. Koliko pikula sada ima Petar?

Još jedna od metoda za ispitivanje razumijevanja aditivnosti je zadatak "kupovanja" u kojem ispitanik treba stvoriti određeni iznos koristeći kovanice različitih vrijednosti. Ovi zadaci su bili korišteni u ispitivanju djece i nepismenih odraslih u nekoliko zemalja. U nekim jezicima je kompozicija višeznamenkastih brojeva već izvedena iz izgovora brojeva (npr. na kineskom i japanskom jeziku broj 12 se čita kao "deset-dva"). Da bi spriječili rješenja koja se osnivaju samo na korištenju verbalnih oznaka za kovanice,

zadatak "kupovanja" uključivao je zadatke sa kovanicama od 5 centi i 1 centa te one sa kovanicama od 1 i 10 centi. Uspoređivanjem rezultata engleskih ispitanika sa rezultatima kineskih ispitanika, pokazalo se da su Kinezi bolji u oba zadatka.

Iako još nije utvrđeno postoji li kakva povezanost između korištenja strategije razdvajanja, rješavanja složenijih problemskih zadataka te uspjeha u zadacima «kupovanja», neka istraživanja su pokazala da djeca mogu prije usvojiti zadatke «kupovanja» nego rješavanje složenijih problemskih zadataka. Primjerice, Martin-Mourao i Cowan (1998) ispitivali su uspjeh u rješavanju složenijih problemskih zadataka i zadataka «kupovanja» kod djece tijekom prva tri razreda osnovne škole te dobili da su djeca uspješnija u rješavanju zadataka «kupovanja» nego u složenijim problemskim zadacima.

KOMUTATIVNOST

Zbrajanje je komutativno, što znači da ukupan rezultat ne ovisi o redosljedu pribrojnika, simbolički izraženo $a+b=b+a$. Razumijevanje komutativnosti se podrazumijeva u strategijama zbrajanja koje zanemaruju redosljed pribrojnika (npr. strategija pribrojavanja manjeg), što su neka istraživanja i pokazala (Baroody, 1987; Siegler i Jenkins, 1989).

Dva su pristupa prema kojima se komutativnost razvija kroz nekoliko faza:

1) Baroody i Gannon (1984) smatraju da postoje četiri razine razumijevanja komutativnosti:

a) *razina 0* - djeca imaju unarnu koncepciju zbrajanja, ali ne razumiju princip komutativnosti (npr. oni vide $4+2$, kao 4 i 2 više, a naprotiv $2+4$ vide kao 2 i 4 više, ali ne vide da je $4+2$ isto što i $2+4$).

b) *razina 1 (protokomutativnost)* - djeca mogu zanemariti redosljed pribrojnika da bi im računanje bilo lakše, no unatoč tome nisu sigurni da li je zbroj $2+4$ isti kao i zbroj $4+2$.

c) *razina 2 (pseudokomutativnost)* - djeca još uvijek imaju unarnu koncepciju zbrajanja, ali znaju da zadaci s istim pribrojnicima imaju isti zbroj.

d) *razina 3 (prava komutativnost)* - djeca imaju binarnu predodžbu zbrajanja i pravo matematičko razumijevanje komutativnosti ($a+b=b+a$)

2) Resnick (1992) je smatrala da ne postoji razlika u razvoju između unarne i binarne koncepcije zbrajanja. Za razliku od prethodno navedenog pristupa ona je kao osnovu komutativnosti istaknula nenumeričko kvalitativno razumijevanje. U nastavku će biti opisan model razvoja matematičkog mišljenja kod djece korištenjem osnovnih aritmetičkih koncepata, kao primjerice, principa komutativnosti. Taj model je potaknuo pažljivo analiziranje istraživanja o komutativnosti i povećao interes za istraživanjem tog područja. No prije toga treba navesti da je Resnick (1992) smatrala da u bilo kojem području matematike djeca počinju sa konkretnim mišljenjem dodajući zatim tri razine sve apstraktnijeg mišljenja:

a) *razina 1 - Protokvantitativna matematika*: na toj razini djeca zaključuju o konkretnim objektima bez osvrta na specifične količine, odnosno radije koriste kvalitativne (npr. jabuke + kruške), neko kvantitativne termine ($5+3$). Kvalitativno rezoniranje omogućuje predviđanje smjera odgovora, dok kvantitativno rezoniranje omogućuje određivanje točnog odgovora. Korištenjem kvalitativnog rezoniranja, djeca mogu otkriti da dodavanjem elemenata nekom skupu njegova veličina raste, a da se oduzimanjem elemenata njegova veličina smanjuje.

b) *razina 2 - Kvantitativna matematika*: na ovoj razini djeca mogu zaključivati o brojevima koji su povezani sa određenim i smislenim kontekstom. Primjerice, djeca mogu utvrditi da ako djetetu koje ima tri keksa damo još dva keksa, imati će ukupno pet keksa. A osim toga, još mogu utvrditi da uzimanjem dva keksa koja smo dali djetetu, dijete opet ima tri keksa kao na početku.

c) *razina 3 - Numerička matematika*: na ovoj razini djeca mogu zaključivati o specifičnim brojevima u apstraktnom kontekstu, tako primjerice, dijete može izačunati koliko je $3+2$, bez smislenog konteksta.

d) *razina 4 - Operativna matematika*: na ovoj razini djeca usvajaju opće aritmetičke principe odnosno mogu tretirati operacije sa brojevima kao konceptualne entitete o kojima se može zaključivati u apstraktnom kontekstu. Primjerice, sada dijete može prepoznati princip inverzije tj. da dodavanje bilo kojeg broja može biti vraćeno u prethodno stanje oduzimanjem tog broja ili obrnuto (npr. $2+5=7$, a $7-5=2$).

Resnick (1992) je smatrala da korijeni komutativnosti dosežu unatrag do protokvantitativne razine i potječu iz općeg razumijevanja principa aditivnosti. Čak i prije

nego djeca mogu pouzdano odrediti količinu konkretnih objekata, oni znaju da cjelina može biti podijeljena na dva ili više dijelova i da se od dijelova može ponovno sastaviti cjelina te da redoslijed kojim su dijelovi kombinirani ne mijenja cjelinu. Protokvantitativna razina i sljedeće tri razine razvoja principa komutativnosti u okviru Resnickinog modela opisane su u tablici br.3.

| Tablica 3. Razine razvoja komutativnosti (prema Resnick, 1992) | |
|--|--|
| razina komutativnosti | primjer |
| protokvantitativna (prenumerička) | jabuke + kruške = kruške + jabuke (dio 1.+ dio 2. = dio 2. + dio1.) |
| kvantitativna (specifični brojevi u smislenom kontekstu) | 3 jabuke + 5 krušaka = 5 krušaka + 3 jabuke |
| numerička (specifični brojevi u apstraktnom kontekstu) | $3 + 5 = 5 + 3$ |
| razina operacija (opći aritmetički principi) | $a + b = b + a$ |

Uspoređivanjem navedena dva pristupa može se zaključiti da su se Baroody i Gannon (1984) usmjerili na jedan tip komutativnosti, i to komutativnost na numeričkoj razini prema Resnickinom modelu (3.razina), dok su jednostavnije razine komutativnosti koje su opisali samo ograničene verzije te numeričke razine.

U nastavku slijedi opis nekih od istraživanja razumijevanja principa komutativnosti.

Sophian, Harley i Martin (1995) ispitali su protokvantitativnu komutativnost kod djece u dobi od 4 i 5 godina. Zadatak djeteta bio je da procijeni da li su skupovi igračaka koji su bili sastavljeni od specifičnih i nespecifičnih količina jednaki. Kao nespecifičnu količinu koristili su kutiju i zdjelu sa ribicama te kutiju i zdjelu sa pticama, a kao specifičnu količinu koristili su brojeve 2 i 3 odnosno dvije ili tri ribice i dvije ili tri ptice. Djeca su rješavala zadatke komutativnosti i zadatke nejednakosti, pri čemu je njihov zadatak bio da procijene jesu li dvije lutke dobile jednaki broj igračaka. Primjerice. u zadatku komutativnosti jedna lutka je mogla imati zdjelu crvenih ribica i dvije ptice, dok je druga imala dvije crvene ribice i zdjelu sa pticama. U ovim zadacima količine su bile jednake, ali su se odnosile na različite vrste igračaka i korišten je različit redoslijed. Na zadacima

nejednakosti lutke su imale ili iste nespecifične količine i različite specifične količine (npr. kutiju sa crvenim ribicama i dvije ptice trebalo je usporediti sa tri crvene ribice i kutijom sa pticama) ili iste specifične količine i različite nespecifične količine (npr. kutiju sa ribicama i dvije ptice trebalo je usporediti sa dvije ribice i zdjelom sa pticama). Polovica ispitanika je mogla vidjeti igračke u zdjelama i kutijama, a polovica nije. Čak i kad su igračke u kutijama i zdjelama bile vidljive, pa su ih ispitanici mogli prebrojati, to nije utjecalo na točnost odgovora, što ukazuje da uspjeh ne ovisi o brojanju. Više od polovice djece u svakoj dobnoj skupini rješilo je točno i zadatke komutativnosti i zadatke nejednakosti. Rezultati navedenog istraživanja nisu jednoznačni zato jer su zadaci uključivali i specifične i nespecifične količine, a to ne omogućuje jednostavno kvalitativno rezoniranje. Drugim rječima, kvalitativno rezoniranje o dvije nespecifične količine može prethoditi kvalitativnom rezoniranju kombinacije nespecifičnih i specifičnih količina.

Cowan i Renton (1996) usporedili su rezultate djece u dobi od pet do sedam godina na tri vrste zadatka. Zadaci koji su se sastojali isključivo od nespecifičnih količina (npr. kutija sa puno bombona), prebrojanih količina (ispitanik je imao mogućnost prebrojati predmete) i simbolički izraženi zadaci (npr. $5+3$). U jednom drugom istraživanju, ispitanicima u dobi od 5 godina dali su zadatke nespecifične količine i zadatke prebrojane količine. Rezultati obje studije nisu pokazali značajno bolju izvedbu na zadacima nespecifične količine. Ukratko, dobiveni rezultati nisu bili konzistentni sa Resnickinim (1992) shvaćanjem da protokvantitativno razumijevanje komutativnosti prethodi kvantitativnom ili numeričkom razumijevanju tog principa.

Ioakimidou (1998, prema Baroody i Dowker, 2003) je u svojim istraživanjem također pokazao da se protokvantitativna komutativnost ne javlja prije kvantitativne komutativnosti.

Neka istraživanja (Wynn's, 1990; prema Baroody i Dowker, 2003) pokazala su da znanje i razumijevanje brojanja može odrediti uspjeh u zadacima prebrojanih količina, ali može biti nebitno za uspjeh u zadacima nespecifične količine.

Iako neki (npr. Baroody, 1984) smatraju da je razumijevanje principa "nevažnosti redoslijeda" u brojanju nezavisno od komutativnosti, Gelman i Gallistel (1978) smatrali su da "nevažnost redoslijeda" u brojanju može prethoditi razumijevanju komutativnosti.

Ioakimidou (1998, prema Baroody i Dowker, 2003) je proveo istraživanje čiji rezultati su pokazali da razumijevanje principa “nevažnosti redosljeda” u brojanju ne prethodi razumijevanju komutativnosti u zadacima prebrojanih količina.

Ukratko, s obzirom da rezultati dosadašnjih istraživanja nisu konzistentni, naše znanje o razvoju principa komutativnosti još uvijek ostaje rascjepkano.

ASOCIJATIVNOST

Kao treći osnovni princip zbrajanja u literaturi se navodi asocijativnost. Asocijativnost možemo definirati kao princip po kojem zadaci u kojima su skupovi razdvojeni te ponovno kombinirani drugačijim redosljedom imaju isti odgovor, simbolički izraženo $(a+b)+c = a+(b+c)$. Teorijska osnova i istraživanja vezana isključivo uz princip asocijativnosti za sada nisu poznata.

Rezultati istraživanja koja ispituju odnos između aditivnosti, komutativnosti i asocijativnosti

Čini se da se razumijevanje principa zbrajanja pojavljuje kroz uočavanje pravila u načinima na koji konkretni objekti (npr. bomboni) mogu biti kombinirani. Stoga se uvažavanje osnovnih pravila principa zbrajanja u interakciji sa skupovima konkretnih objekata smatra važnim za razvoj koncepata (Gelman i Gallistel, 1978; Resnick, 1992). S obzirom da su principi zbrajanja važni za konceptualno znanje, postavlja se pitanje kojim redosljedom djeca uče o njima. No, međutim, nisu sva istraživanja pokazala nezavisnost principa zbrajanja. Tako primjerice, Resnick (1992) tvrdi da se kod djece ne razlikuje razumijevanje asocijativnosti i komutativnosti. Pritom se pozvala na longitudinalnu studiju Pitta, sedmogodišnjaka koji je smatrao da razumijevanje komutativnosti i asocijativnosti proizlazi iz razumijevanja aditivnosti. Iako je Pitt prepoznao međuzavisnost principa moguće je da se radi o razumijevanju principa na različitim razinama. No, postoje neki dokazi da se komutativnost može usvojiti prije asocijativnosti. Tako su Close i Murtagh (1986, prema Canobi i sur., 2002) pronašli da su djeca uspješnija u rješavanju računskih zadataka koji odražavaju princip komutativnosti, nego onih koji odražavaju princip asocijativnosti, ali ta razlika može biti povezana više sa računskim

nego sa konceptualnim zahtjevima uključenim u rješavanje zadataka sa tri pribrojnika. Canobi i sur. (1998) ispitali su konceptualno znanje zasebno od rješavanja zadataka i pronašli da su djeca puno uspješnija u prepoznavanju i objašnjavanju povezanosti među zadacima komutativnosti, nego u opisivanju aspekata aditivnosti i asocijativnosti. Svi navedeni rezultati odnose se na studije koje su u ispitivanju koristile simboličke zadatke kao npr. $2+3=3+2$, ali nije poznato kakvi bi se rezultati dobili ispitivanjem razumijevanja principa kod djece, ali u kontekstu konkretnih objekata (npr. 3 jabuke + 2 jabuke = 2 jabuke + 3 jabuke).

Langford (1981, prema Canobi i sur.,2002) je longitudinalnom studijom ispitao razumijevanje principa u kontekstu konkretnih objekata. U tom su istraživanju djeca trebala dati odgovor na osnovu eksperimentatorova opisa akcije odnosno onoga što čini u kutijama sa graškom koje su bile prekrivene. Rezultati su pokazali da razumijevanje komutativnosti prethodi razumijevanju asocijativnosti. No međutim, u tom istraživanju su se djeca morala sjećati opisa akcije eksperimentatora kako bi dali točan odgovor, a osim toga zadaci asocijativnosti su uključivali više elemenata i dulji opis od zadataka komutativnosti. Stoga, potrebna su dodatna istraživanja o prepoznavanju principa zbrajanja u kontekstu konkretnih objekata.

Osim navedenog, još jedna poteškoća u interpretaciji ranijih istraživanja je to da ostaje nejasno zašto je djeci asocijativnost teža od komutativnosti. Primjerice, u gore navedenom istraživanju Langforda, zadatak asocijativnosti bio je isti kao i zadatak komutativnosti samo što je uključivao tri kutije graška umjesto dvije. Simbolički izraženo, zadatak asocijativnosti je bio bliži jednakosti $a+b+c=b+a+c$, nego jednakosti $(a+b)+c=a+(b+c)$. Stoga, želimo li ispitati razumijevanje asocijativnosti nužno je ispitati znanje razdvojenih i kombiniranih skupova. Tako su Resnick i Omanson (1987, prema Canobi i sur.,2002) ispitivanjem principa zbrajanja kod školske djece smatrali da princip asocijativnosti razumiju ona djeca koja su usvojila zadatke kao što su $23+8$, razdvajanjem 23 na $20+3$ te rekonstruiranjem zadatka u $(20+8)+3$. Djeca su razdvojila jedan pribrojničnik i zatim složila brojeve novim redoslijedom. Time je ispitan i jedan aspekt principa asocijativnosti koji Langford (1981) nije ispitao.

Odgovori djece u zadacima koji ispituju principe zbrajanja omogućuju identifikaciju profila dio-cjelina znanja. U prilog tome Canobi i sur. su proučavanjem individualnih

razlika u konceptualnom znanju pronašli da kod djece postoji tendencija da:

a) razumiju i komutativnost i asocijativnost, b) razumiju samo komutativnost, c) ne razumiju niti jedan od principa.

Da bi se pomoglo u objašnjenju individualnih razlika u zbrajanju kod djece, istraživanje razvoja znanja principa zbrajanja može "osvijetliti" veze koje djeca stvaraju između neformalnog matematičkog znanja i školske matematike. U skladu s time bilo bi korisno usporediti koncepte zbrajanja predškolske djece s onom djecom koja su počela učiti matematiku. Canobi i sur. (1998) utvrdili su da je kod djece u dobi od 6 do 8 godina uspjeh u objašnjenju povezanosti zadataka koji se osnivaju na aditivnosti, komutativnosti i asocijativnosti povezan sa njihovim vještinama rješavanja zadatka. Konkretno, djeca koja su bila naprednija u razumijevanju principa zbrajanja, puno su brže, točnije i fleksibilnije rješavala školske zadatke zbrajanja od druge djece. Djeca sa boljim konceptualnim znanjem izvjestila su kako su prilikom odgovaranja na ponovljene zadatke koristili strategiju dosjećanja kao i druge naprednije strategije zbrajanja. Iako rezultati ovih istraživanja ukazuju na to da je rješavanje zadataka kod starije djece povezano sa znanjem principa u apstraktnom kontekstu, malo se zna o znanju principa u smislenom kontekstu, brojanju i vještinama rješavanja zadataka kod mlađe djece. Jedno od takvih istraživanja je istraživanje Sophian, Harley i Martina (1995) koje je pokazalo da i djeca u dobi od tri godine razumiju principe zbrajanja u smislenom kontekstu, čak i kad ne znaju prebrojati skupove kako bi ih usporedili. Baroody i Gannon (1984) ispitali su djecu u dobi od 5 i 6 godina te dobili da da korištenje strategije pribrajanja manjeg pribrojnika nužno ne odražava znanje komutativnosti. Navedene dvije studije ukazuju da brojanje i vještine rješavanja zadataka kod mlađe djece ne moraju biti povezane sa njihovim znanjem principa zbrajanja.

No ipak, druge studije predlažu da konceptualno znanje kod djece predstavlja osnovu za korištenje naprednih strategija zbrajanja (Cowan & Renton, 1996; Fuson, 1982; Martins-Murao & Cowan, 1998). Tako primjerice, neka istraživanja ukazuju na to da korištenje strategije zbrajanja koja ne ovisi o redoslijedu kao što je strategija pribrajanja manjeg odražava razumijevanje komutativnosti (Canobi i sur., 1998; Cowan i Renton, 1996).

A Martins-Mourao i Cowan (1998) pronašli su da brojanje od manjeg ili većeg pribrojnika može biti posljedica razumijevanja aditivnosti. Osim toga, konceptualno

razumijevanje onoga što čini valjanu strategiju zbrajanja prethodi sposobnosti djeteta da počne brojati od većeg pribrojnika umjesto da prebroji sve pribrojnike počevši od jedan. Brojanje od većeg ili manjeg pribrojnika puno je efikasnija strategija. Djeca dobiju konačni zbroj dva pribrojnika tako da počnu brojati od jednog, umjesto da počnu od nule. Iako je ovo, a i slična istraživanja pokazalo da konceptualno znanje može biti povezano sa korištenjem određenih strategija zbrajanja, više su usmjerena na povezanost između konceptualnog znanja i vještina rješavanja zadataka kod starije djece. Stoga su potrebna istraživanja o povezanosti između razvoja dio-cjelina znanja kod djece i ranog rješavanja problema.

S obzirom da je mali broj istraživanja koja ispituju razumijevanje principa zbrajanja u konkretnom kontekstu, cilj ovog istraživanja bio je upravo ispitati razumijevanje osnovnih principa zbrajanja (aditivnosti, komutativnosti i asocijativnosti) u konkretnom kontekstu kod predškolske djece i učenika prvog razreda osnovne škole.

2. PROBLEMI

Kako bismo ispitali razumijevanje osnovnih principa zbrajanja kod predškolske djece i učenika prvog razreda osnovne škole postavljeni su sljedeći problemi:

1. Ispitati postoji li razlika u razumijevanju tri osnovna principa zbrajanja: aditivnosti, komutativnosti i asocijativnosti?

U skladu sa navodima u literaturi (Canobi i sur.,2002) pretpostavili smo da razumijevanje komutativnosti prethodi razumijevanju asocijativnosti odnosno da su neki principi (kao što je asocijativnost) složeniji od drugih (kao što je komutativnost).

2. Ispitati postoji li razlika u razumijevanju principa zbrajanja između predškolske djece i učenika prvog razreda osnovne škole?

U skladu sa navodima u literaturi (Canobi i sur., 2002) pretpostavili smo da ne postoji statistički značajna razlika u razumijevanju principa komutativnosti i asocijativnosti između predškolske djece i one koja su krenula u školu, ali da postoji statistički značajna razlika u razumijevanju principa aditivnosti između te dvije skupine ispitanika.

3. METODOLOGIJA

3.1. SUDIONICI

Kako bismo odgovorili na postavljene probleme istraživanje je provedeno na dvije skupine djece. Ukupno je u istraživanju sudjelovao 241 ispitanik, a od toga je 148 ispitanika pripadalo skupini predškolske djece (87 dječaka i 61 djevojčica), a 93 ispitanika skupini učenika prvog razreda osnovne škole (47 dječaka i 46 djevojčica). Skupinu predškolske djece čini 62 ispitanika iz dječjeg vrtića "Travno" u Zagrebu i 86 ispitanika iz dječjeg vrtića "Jarun" u Zagrebu, dok skupinu učenika prvog razreda čini 53 ispitanika iz osnovne škole "Ivan Meštrović" u Zagrebu i 40 ispitanika iz osnovne škole "Gustav Krklec" u Zagrebu. Ispitanici su bili u dobi od pet do osam godina.

Za sudjelovanje u istraživanju zatražena je pismena dozvola od strane roditelja.

3.2. PRIBOR

U istraživanju je korišten sljedeći pribor:

1. Dva vrlo slična medvjedića (bijeli medvjedeći visoki 40 cm sa kopicama u različitim bojama)
2. Šest bijelih kutija dimenzija 22x13x4 cm
3. Dvije plave, dvije crvene, te dvije zelene kutije dimenzija 11,5x7x2,5 cm
4. Šest plavih bombona, osam crvenih bombona i dvadeset zelenih bombona
5. diktafon
6. zadaci za ispitivanje tri principa zbrajanja: probni i testni zadaci (prilog 3. i 4.)
7. individualni protokoli (prilog 5.)

3.3. POSTUPAK

Sa svakim djetetom provedeno je individualno ispitivanje u trajanju od otprilike petnaestak minuta. Ispitivanje su provodili studenti psihologije koji su prethodno posebno za to educirani. Tijekom ispitivanja svaki ispitanik dobio je kombinaciju tri vrste zadataka raspoređenih po slučajnom rasporedu (9 zadataka za ispitivanje tri principa zbrajanja (po tri zadatka za svaki princip), 3 zadatka identičnosti i 3 zadatka nejednakosti) koji će detaljnije biti opisani u nastavku (prilog 4)

Prije samog početka mjerenja zadatak eksperimentatora bio je da postavi dva medvjedića koja će biti nasuprot ispitaniku i ispred svakog medvjedića stavi po tri bijele kutije, svaku u razmaku od 4-5cm. (napomena: bijele kutije imaju funkciju zagrada, tako ako se dvije kutije u boji nalaze u jednoj bijeloj kutiji, kao da su u zagradi). Nakon toga u obje plave kutije trebao je staviti po tri plava bombona, u obje crvene kutije po četiri crvena bombona i u obje zelene kutije po deset zelenih bombona (poslaganih jedni na druge), te odložiti ih sa strane.

Nakon što je ispitanik sjeo nasuprot medvjedića eksperimentator mu je objasnio kako će se oni sada igrati igricu u kojoj dva medvjedića po imenu Tin i Tina dobivaju neke bombone, a njihov zadatak je da kažu jesu li Tin i Tina dobili jednaki broj bombona. Sljedeći korak je da eksperimentator ispitaniku pokaže dvije plave kutije sa po tri plava bombona i kaže: "Pogledaj, ove dvije kutije su jednake. U svakoj se nalazi po tri plava bombona!" Zatim mu pokaže dvije crvene kutije sa po četiri crvena bombona i kaže: "Pogledaj, ove dvije kutije su jednake. U svakoj se nalazi po četiri crvena bombona!" I na kraju mu pokaže dvije zelene kutije sa po deset zelenih bombona poslaganih jedni na druge, kako ih ispitanik ne bi mogao prebrojati i kaže: "Pogledaj, ove dvije kutije su jednake. U obje se nalazi jednaki broj zelenih bombona!". Kod zelenih bombona nisu spominjali koliki je broj bombona u kutiji s ciljem da se kod ispitanika spriječi računanje u sebi i brojanje (u slučaju da je ispitanik pitao koliko ima zelenih bombona, eksperimentator je odgovorio da ima puno zelenih bombona). Eksperimentator je zatim napomenuo ispitaniku da bombone ne treba brojati.

Nakon toga eksperimentator je dao ispitaniku 3 probna zadatka (Prilog 3.) čija je svrha bila da se ispitanici prilagode zadacima i da se provjeri sjećaju li se da kutije u boji

sadrže jednaki broj bombona. Eksperimentator je sjedio sa desne strane djeteta i stavljao bombone s lijeva na desno, na taj način da sve grupe ostanu vidljive ispitaniku tako da se ne moraju oslanjati na pamćenje akcija ili riječi eksperimentatora kako bi procijenili jednakost dvaju problema. Istovremeno kako je eksperimentator stavljao bombone, tako je i opisivao što radi. (napomena: kad je eksperimentator stavljao kutije u boji u bijele kutije one nisu smjele biti ravno posložene jedna do druge, već "razbacane").

Primjer probnog zadatka: "Tin dobije četiri crvena bombona (stavlja se u prvu bijelu kutiju ispred medvjedića). Tina dobije četiri crvena bombona (stavlja se u prvu bijelu kutiju ispred medvjedića).»

Nakon što je eksperimentator stavio bombone ispred medvjedića, upitao je ispitanika : "Imaju li Tin i Tina jednaki broj bombona?" Odgovor ispitanika zabilježio je u individualni protokol (Prilog 5) i zatim dao ispitaniku povratnu informaciju i objašnjenje o tome je li njegov odgovor točan ili netočan. Npr. ako je odgovor ispitanika točan rekao je: " Da, Tin je dobio četiri crvena bombona i Tina je dobila četiri crvena bombona. Znači, oni imaju jednaki broj bombona!" Ako je odgovor ispitanika netočan rekao je: "Nije točno, Tin je dobio četiri crvena bombona i Tina je dobila četiri crvena bombona. Oboje imaju po četiri crvena bombona. Znači, oni imaju jednaki broj bombona!" Nakon što su ispitanici riješili tri probna zadatka započelo se sa testnim zadacima.

Svaki ispitanik dobio je kombinaciju tri vrste zadataka raspoređenih po slučajnom rasporedu (9 zadataka za ispitivanje tri principa zbrajanja, 3 zadatka identičnosti i 3 zadatka nejednakosti) (Prilog 4). Eksperimentatori su već unaprijed dobili tri kombinacije zadataka (A,B,C) raspoređene po slučajnom rasporedu. Zadaci identičnosti ($a+b=a+b$) i nejednakosti ($a+b=b+c$) koristili su se kako bi se utvrdilo nemaju li možda ispitanici sklonost ka određenoj vrsti odgovora (npr. na sve zadatke daju odgovor jednako ili nejednako). Prije testnih zadataka eksperimentator je uključio diktafon i snimao odgovore ispitanika. Testni zadaci su bili slični probnim zadacima, osim što se kod testnih zadataka daje po tri kutije bombona svakom medvjediću. Postupak izvođenja zadatka bio je isti kao i kod probnih zadataka.

Primjer za ispitivanje komutativnosti: "Tin dobije kutiju sa zelenim bombonima (stavlja se u prvu veću kutiju ispred medvjedića), zatim dobije četiri crvena bombona (stavlja se u

drugu veću kutiju ispred medvjedića) i zatim dobije tri plava bombona (stavlja se u treću veću kutiju ispred medvjedića). Tina dobije četiri crvena bombona (stavlja se u prvu veću kutiju ispred medvjedića), zatim dobije kutiju sa zelenim bombonima (stavlja se u drugu veću kutiju ispred medvjedića) i zatim dobije tri plava bombona (stavlja se u treću veću kutiju ispred medvjedića). Imaju li Tin i Tina jednaki broj bombona?" Nakon što je ispitanik odgovorio, eksperimentator je zabilježio odgovor u individualni protokol i zatražio od ispitanika kratko objašnjenje odgovora. Za razliku od probnih zadataka, kod testnih zadataka ispitanici nisu dobili povratnu informaciju o odgovoru. Procjene ispitanika su označene kao točne ako je ispitanik izjavio da su zadaci koji sadrže iste grupe bombona jednaki, a zadaci koji sadrže različiti broj bombona nejednaki. U slučaju da je ispitanik od početka davao odgovore neznam, ispitivanje se prekinulo nakon četiri takva uzastopna odgovora u testnim zadacima, dok se kod probnih svejedno dala povratna informacija. Ako je ispitanik od početka pogrešno odgovarao, ispitivanje se nije prekinulo, već se išlo do kraja. Na individualnom protokolu se nalazi i kategorija "objašnjenje ispitanika", u koju nije bilo potrebno ništa zapisivati, osim ako ispitanik nije dao neki neuobičajeni odgovor (npr. neznam, meni se to ne da i sl.). U okviru ovog diplomskog rada u obradu su uzeti samo odgovori ispitanika, ali ne i objašnjenja.

4. REZULTATI

Zadatak ispitanika koji su sudjelovali u ovom istraživanju bio je procijeniti jednakost dvaju zadataka zbrajanja u smislenom kontekstu odnosno trebali su procijeniti imaju li dva medvjedića jednaki broj bombona. Svaki zadatak odražavao je jedan od tri principa zbrajanja: aditivnost, komutativnost ili asocijativnost.

Tijekom istraživanja ispitan je ukupno 241 ispitanik, a obrađeni su podaci 182 ispitanika. Iz obrade je zbog nevaljanih rezultata izbačeno 23 ispitanika (17 ispitanika koji su nasumce odgovarali na pitanja i 6 ispitanika s kojima je prekinuto ispitivanje jer su nakon četiri zadatka izjavili da neznaju odgovor). A kako bi izjednačili broj ispitanika predškolske skupine (N=127) i skupine učenika prvog razreda (N=91) po slučaju je izbačeno 36 ispitanika iz predškolske skupine.*

S obzirom da je testiranje normaliteta distribucija Kolmogorov-Smirnovljevim testom pokazalo da se one statistički značajno razlikuju od normalne distribucije podaci su obrađeni neparametrijskim testovima. U prilogu 6. prikazane su distribucije rezultata dobivenih ispitivanjem principa zbrajanja te prosječne vrijednosti i indeksi raspršenja za svaki princip.

1. Kako bismo odgovorili na prvi problem i ispitali postoji li razlika u razumijevanju tri osnovna principa zbrajanja podaci su obrađeni Friedmanovim testom (neparametrijski test za više zavisnih uzoraka). Rezultati su prikazani u tablicama 1. i 2.

TABLICA 1. Srednji rangovi za princip aditivnosti, komutativnosti i asocijativnosti.

| princip zbrajanja | srednji rang |
|-------------------|--------------|
| aditivnost | 2,01 |
| komutativnost | 2,01 |
| asocijativnost | 1,98 |

TABLICA 2. Rezultati obrade Friedmanovim testom za ispitivanje razlike u razumijevanju tri principa zbrajanja kod predškolske djece i učenika prvog razreda osnovne škole.

| Hi-kvadrat | df | broj ispitanika | p |
|------------|----|-----------------|------|
| 1,156 | 2 | 182 | 0,56 |

Rezultati Friedmanovog testa pokazali su da ne postoji statistički značajna razlika ($p=0,56$) u razumijevanju tri osnovna principa zbrajanja kod predškolske djece i učenika prvog razreda osnovne škole.

Treba napomenuti da je također ispitano postoji li razlika u razumijevanju tri principa posebno kod predškolske djece i posebno kod učenika prvog razreda, ali ni u tom slučaju nije dobivena statistički značajna razlika.

2. Kako bismo odgovorili na drugi problem provedenog ispitivanja i ispitali postoji li razlika u razumijevanju tri osnovna principa zbrajanja između predškolske djece i učenika prvog razreda korišten je Mann-Whitneyev test za svaki od principa. Mann-Whitneyev test je neparametrijski test za ispitivanje razlika između dviju nezavisnih skupina. Rezultati su prikazani u tablicama 3. i 4.

TABLICA 3. Rangovi za svaki od tri principa kod predškolske djece i učenika prvog razreda.

| princip | institucija | broj ispitanika | srednji rang | suma rangova |
|----------------|-------------|-----------------|--------------|--------------|
| aditivnost | vrtić | 91 | 87,04 | 7921,00 |
| | škola | 91 | 95,96 | 8732,00 |
| komutativnost | vrtić | 91 | 87,63 | 7974,00 |
| | škola | 91 | 95,37 | 8679,00 |
| asocijativnost | vrtić | 91 | 87,97 | 8005,05 |
| | škola | 91 | 95,03 | 8647,05 |

TABLICA 4. Rezultati obrade Mann-Whitneyevim testom za ispitivanje razlike u razumijevanju tri osnovna principa zbrajanja između predškolske djece i učenika prvog razreda.

| princip zbrajanja | aditivnost | komutativnost | asocijativnost |
|-------------------|------------|---------------|----------------|
| Mann-Whitney | 3735,000 | 3788,000 | 3819,500 |
| z | -2,151 | -1,828 | -1,629 |
| p | 0,03 | 0,07 | 0,10 |

Dobiveni rezultati pokazuju da postoji statistički značajna razlika ($z=-2,151$; $p=0,03$) u razumijevanju principa aditivnosti između predškolske djece i učenika prvog razreda. Razlika u razumijevanju principa komutativnosti i asocijativnosti između predškolske djece i učenika prvog razreda nije se pokazala statistički značajnom ($z=-1,828$; $p=0,07$ i $z=-1,629$; $p=0,10$).

*Napomena: Broj ispitanika u vrtiću i školi nije izjednačen jer je provođenje ispitivanja u vrtićima i školama unaprijed dogovoreno u točno određene dane, te se nije moglo znati koliko će ispitanika taj dan biti prisutno. Ispitan je prilično velik broj ispitanika iz razloga što će isti ispitanici sudjelovati u longitudinalnom istraživanju. Kako bi bili sigurni da dobiveni rezultat nije pod utjecajem razlike u broju ispitanika po slučaju je izbačeno 36 ispitanika iz vrtićke skupine, pa su obrađeni podaci 91 ispitanika iz predškolske skupine i 91 ispitanika iz prvog razreda osnovne škole. Kako bi izjednačili broj ispitanika dviju skupina, ispitanici su selekcionirani na nekoliko načina (izbačeno je prvih 36, zadnjih 36, prvih 18 i zadnjih 18, 36 ispitanika u sredini...). Rezultati obrade naparametrijskim testovima za svaku od kombinacija išli su u istom smjeru odnosno nisu se bitno razlikovali. Osim toga, podaci su obrađeni i parametrijskom statistikom (složenom analizom varijance za djelomično zavisne uzorke) pri čemu nije dobivena niti jedna statistički značajna razlika. Također su neparametrijskom statistikom obrađeni i svi rezultati ($N= 218$), bez izjednačavanja broja ispitanika u predškolskoj i školskoj skupini, ali ni u tom slučaju nije dobivena niti jedna statistički značajna razlika.

5. RASPRAVA

Cilj provedenog istraživanja bio je ispitati razumijevanje osnovnih principa zbrajanja: aditivnosti, komutativnosti i asocijativnosti u kontekstu konkretnih objekata (u našem ispitivanju su to bili medvjedići i bomboni), kako bi bolje razumijeli važnost i razvoj dio-cjelina znanja. Prepoznavanjem načina na koji je cjelina sastavljena od različitih dijelova predstavlja smisao broja i leži u osnovi mnogih veza među zadacima zbrajanja. Primjerice, ako zbrojimo dijelove različitim redoslijedom, oni i dalje čine istu cjelinu, stoga slijedi da je $a+b=b+a$ (komutativnost). Principi kao što su aditivnost, komutativnost i asocijativnost osnovna su svojstva zbrajanja, a istraživanje redoslijeda po kojem djeca uče o njima otvara put za razumijevanje razvoja dio-cjelina znanja.

U provedenom ispitivanju, zadatak ispitanika bio je procijeniti jednakost dvaju zadataka zbrajanja u kontekstu konkretnih objekata. Zadaci zbrajanja su varirali s obzirom na redoslijed u kojem su grupe bombona bile kombinirane i s obzirom na kompoziciju. S ciljem da se ispita znanje povezano sa različitim principima, odnosno razumijevanje tri osnovna principa zbrajanja, ispitanici su procijenjivali sljedeće jednakosti:

a) za ispitivanje razumijevanja komutativnosti: $a+b+c = a+c+b$

b) za ispitivanje razumijevanja aditivnosti: $(a+b)+c = a+b+c$

c) za ispitivanje razumijevanja asocijativnosti: $(a+b)+c = a+(b+c)$

Za svaki od tri principa bilo je postavljeno po tri zadatka, tako da je maksimalni rezultat za pojedini princip bio 3, a minimalni 0. Kao što je u postupku navedeno postavljeno je još 6 zadataka koji su imali kontrolnu funkciju, i to tri zadatka identičnosti ($a+b=a+b$) i tri zadatka nejednakosti ($a+b=a+c$).

Kao što je već spomenuto jedan od problema u ovom ispitivanju bio je provjeriti postoje li razlike u razumijevanju tri osnovna principa zbrajanja: aditivnosti, komutativnosti i asocijativnosti. U okviru postavljenog problema rezultati su obrađeni Friedmanovim testom (neparametrijski test za ispitivanje razlike između više zavisnih uzoraka). Provjera

tim testom pokazala je da ne postoji statistički značajna razlika ($\chi^2=1,156$; $p=0,56$) u razumijevanju tri osnovna principa zbrajanja odnosno ispitanici podjednako dobro razumiju svaki od principa. Treba naglasiti da je također ispitano postoji li razlika u razumijevanju principa u podskupinama tj. posebno kod predškolske i posebno kod školske djece, ali ni u tom slučaju nije dobivena statistički značajna razlika. Dobiveni rezultati nisu u skladu sa očekivanjima, ali se ipak mogu objasniti u okviru nekih teorijskih pristupa. Većina provedenih ispitivanja pokazala je da razumijevanje komutativnosti prethodi razumijevanju asocijativnosti (Canobi i sur., 1998; Close i Murtagh, 1986; Langford, 1981; prema Baroody i Dowker, 2003), odnosno da su neki principi (kao što je asocijativnost) složeniji od drugih (kao što je komutativnost) i da mogu biti stečeni kasnije od drugih. U skladu sa navedenim Close i Murtagh (1986, prema Canobi i sur., 2003) pronašli su da su djeca uspješnija u rješavanju računskih zadataka koji odražavaju znanje komutativnosti, nego onih koji odražavaju znanje asocijativnosti, ali ta razlika može više biti povezana sa računskim nego sa konceptualnim zahtijevima zadataka. Canobi i sur. (1998) ispitivali su konceptualno znanje odvojeno od rješavanja zadataka i pronašli da su djeca uspješnija u prepoznavanju i objašnjavanju veza između zadataka komutativnosti od onih zadataka koji odražavaju aspekte aditivnosti i asocijativnosti. Ali treba istaknuti da se dobiveni rezultati odnose na simbolički prezentirane zadatke ($2+3=3+2$), pa se postavlja pitanje kakvi rezultati bi se javili korištenjem zadataka u smislenom kontekstu. Stoga je Langford (1981, prema Canobi i sur., 2003) longitudinalnom studijom ispitaio razumijevanje principa u smislenom kontekstu, pri čemu su odgovori ispitanika na eksperimentatorov opis akcija u kutijama sa graškom koje su bile prekrivene, pokazali da znanje komutativnosti prethodi znanju asocijativnosti. No, nedostatak navedenog ispitivanja bio je to što su se ispitanici morali prisjećati eksperimentatorovih opisa kako bi dali točan odgovor, a zadaci asocijativnosti bili su duži te samim time zahtijevali duži opis akcija od zadataka komutativnosti. Uzimajući u obzir nedostatke u dosadašnjim ispitivanjima Canobi i sur. (2002) proveli su istraživanje analogno našem odnosno ispitali su razumijevanje principa zbrajanja u kontekstu konkretnih objekata (postupak je bio isti kao u našem ispitivanju, osim što su oni koristili zadatke sa dvije (npr. $a+b = b+a$) i tri grupe bombona (npr. $a+b+c = a+c+b$), ali s obzirom da nisu dobili statistički značajnu razliku između te dvije vrste

zadataka, mi smo koristili zadatke samo sa tri grupe bombona). Oni su dobili da je razumijevanje asocijativnosti u kontekstu konkretnih objekata teže od razumijevanja komutativnosti. Drugim rječima potvrdili su rezultate prethodnih ispitivanja i zaključili da razumijevanje komutativnosti prethodi razumijevanju asocijativnosti u smislenom kontekstu. Provedeno istraživanje sugerira da razlike u rješavanju zadataka komutativnosti i asocijativnosti kod djece nisu ograničene na simboličke zadatke i ne mogu biti objašnjene naglašavanjem nekonzistentnih faktora kao što su uključivanje težih računskih, verbalnih ili zahtjeva pamćenja. Rezultati dobiveni tim istraživanjem ukazuju da je moguće da se znanje principa pojavljuje kroz uočavanje pravila u načinima na koji konkretni objekti mogu biti kombinirani. Uvažavanje osnovnih pravila principa u interakciji sa skupom konkretnih objekata smatra se važnim za konceptualni razvoj. Tako primjerice, Resnick (1992) naglašava da se konceptualno znanje kod djece razvija nadovezivanjem novih oblika razumijevanja na početnu protokvantitativnu dio-cjelina shemu. Konkretno, u početku djeca mogu razumijeti komutativnost i asocijativnost u okviru toga kako konkretni objekti mogu biti spojeni zajedno, a krucijalni razvoj se javlja kada je znanje brojanja kombinirano sa dio-cjelina shemom, tako da djeca mogu rezonirati pomoću jednakosti kao što je $2 \text{ jabuke} + 3 \text{ jabuke} = 3 \text{ jabuke} + 2 \text{ jabuke}$. Zatim, Resnick smatra da u sljedećoj fazi djeca počinju rezonirati sa brojevima neovisno o njihovom referentnom kontekstu, npr. $2+3 = 3+2$. I nakon toga počinju razumijevati principe kao apstraktna pravila ($a+b=b+a$). Treba naglasiti da iako je većina ispitivanja o redoslijedu razvoja principa pokazala da razumijevanje komutativnosti prethodi razumijevanju asocijativnosti, postoje i nalazi koji nisu konzistentni sa navedenima. Tako primjerice, Resnick tvrdi da se asocijativnost i komutativnost ne razlikuju u razumijevanju kod djece, a proizlaze iz razumijevanja aditivnosti. No, dosadašnji rezultati vezani uz ispitivanje predstavlja li aditivnost osnovu za razumijevanje ostalih principa i jesu li djeca uspješnija prvo u rješavanju zadataka na konkretnoj, a kasnije na apstraktnijim razinama, daju nekonzistentne rezultate. Rezultati dobiveni našim ispitivanjem mogu se objasniti u okviru Resnickinog modela. Rezultati ukazuju na to da ne postoji razlika u razumijevanju tri principa zbrajanja odnosno da djeca podjednako dobro razumiju svaki od principa, stoga su u skladu sa tvrdnjama Resnick (1992). No, treba naglasiti da je naše ispitivanje principa provedeno u konkretnom kontekstu, što bi

prema Resnick odgovaralo kvantitativnoj razini, te je moguće da bi se pojavila razlika u težini tri principa da je ispitivanje provedeno na apstraktnijim razinama koje se prema Resnick javljaju kasnije (numeričkoj razini ili razini operacija). Još jedan od mogućih razloga za dobivene rezultate je dob ispitanika. Canobi i sur. (2002) proveli su ispitivanje na djeci u dobi od četiri do šest godina, dok su najmlađi ispitanici ovog ispitivanja imali pet godina odnosno moguće je da djeca u dobi od pet godina podjednako dobro razumiju svaki od principa na konkretnoj razini.

Zaključno, možemo reći da su rezultati našeg ispitivanja pokazali da ne postoji statistički značajna razlika u razumijevanju tri osnovna principa zbrajanja odnosno i predškolska djeca i učenici prvog razreda podjednako dobro razumiju i aditivnost i komutativnost i asocijativnost u smislenom kontekstu.

Drugi problem provedenog ispitivanja bio je provjeriti postoji li razlika u razumijevanju tri osnovna principa zbrajanja između predškolske djece i učenika prvog razreda. Ispitivanjem razlika između te dvije skupine ispitanika očekivalo se da možemo dobiti uvid u to kako se konceptualno znanje razvija kod predškolske djece i one koja su krenula u školu. Kako bismo odgovorili na drugi problem rezultati su obrađeni Mann-Whitneyevim testom (neparametrijski test za ispitivanje razlike između dva nezavisna uzorka) za svaki od tri principa. Dobiveni rezultati pokazali su da postoji statistički značajna razlika ($z=-2,151$; $p=0,03$) u razumijevanju principa aditivnosti u smislenom kontekstu između predškolske djece i učenika prvog razreda odnosno učenici prvog razreda pokazuju bolji uspjeh u rješavanju zadataka koji odražavaju princip aditivnosti. Istim testom ispitana je razlika između te dvije skupine ispitanika za princip komutativnosti. Dobiveni rezultati pokazali su da ne postoji statistički značajna razlika ($z=-1,828$; $p=0,07$) u razumijevanju principa komutativnosti između predškolske djece i učenika prvog razreda. Ispitivanjem razlike između te dvije skupine djece u razumijevanju principa asocijativnosti također nije dobivena statistički značajna razlika ($z=-1,629$; $p=0,10$), stoga ni u ovom slučaju školska djeca nisu značajno uspješnija u rješavanju zadataka koji odražavaju princip asocijativnosti. No međutim, uvidom u stvarne rezultate (prilog 6.) može se uočiti da ipak školska djeca pokazuju nešto bolji

uspjeh i u zadacima komutativnosti i asocijativnosti, ali ne treba zanemariti to da su obje skupine ispitanika pokazale iznimno dobro razumijevanje principa. Dobiveni rezultati u skladu sa očekivanjima. Kao što je već spomenuto Canobi i sur. (2002) proveli su istraživanje analogno ovome i dobili sljedeće rezultate: nije bilo statistički značajne razlike u točnosti rješavanja zadataka koji su ispitivali znanje komutativnosti i asocijativnosti između predškolske i školske djece, iako se i kod njih uvidom u rezultate može utvrditi da školska djeca pokazuju nešto bolje razumijevanje ta dva principa. No međutim, kao i kod nas dobivena je statistički značajna razlika u zadacima koji su ispitivali znanje aditivnosti, odnosno pokazalo se da je razumijevanje aditivnosti u konkretnom kontekstu bolje kod starije nego kod mlađe djece. Drugim rječima, iako se razumijevanje principa aditivnosti u konkretnom kontekstu poboljšava "ulaskom" u školu, mnoga predškolska djeca vrlo dobro razumiju zadatke koji odražavaju princip komutativnosti i asocijativnosti. Rezultati njihovog i našeg istraživanja konzistentni su sa argumentima da mala djeca razvijaju razumijevanje osnovnih principa zbrajanja u kontekstu konkretnih objekata (Gelman i Gallistel, 1978 i Resnick, 1992). U postupku je navedeno da su osim zadataka za ispitivanje principa zbrajanja, korišteni i zadaci identičnosti ($a+b=a+b$) i nejednakosti ($a+b=a+c$). Svrha uvođenja tih zadataka bila je da provjeri odgovaraju li ispitanici nasumce odnosno razumiju li stvarno zadatke, tako npr. ako je neki ispitanik odgovarao nasumce, te na svaki odgovor rekao «jednako», to se moglo otkriti na osnovu zadataka nejednakosti. Rezultati ispitanika koji su nasumce odgovarali, mogu ukazivati na nerazumijevanje principa zbrajanja, te su izbačeni iz obrade. Osim navedenih ispitanika iz obrade je izbačeno i nekoliko ispitanika koji su izjavili da ne znaju odgovor na prva četiri zadatka, pa je ispitivanje prekinuto. Zbog opisanih razloga iz obrade je izbačeno 23 ispitanika. Tu treba napomenuti kako su ti ispitanici većinom pripadali skupini predškolske djece (od 23 ispitanika, 18 ispitanika je pripadalo predškolskoj skupini). Sve to ukazuje da mlađi ispitanici ipak pokazuju nešto slabije razumijevanje osnovnih principa zbrajanja, što i je u skladu sa očekivanjima, a omogućuje nam uvid u razvoj dio-cjelina znanja. Neka od dosadašnjih istraživanja pokazala su da većina djece u dobi od tri do četiri godine razumije komutativnost na kvantitativnoj razini (Sophian i sur., 1995), što je u skladu sa tvrdnjama Resnick (1992) da je kod vrlo male djece razumijevanje principa nezavisno o mentalnoj reprezentaciji

koja leži u osnovi brojanja i određivanja količine. Suprotno tomu istraživanje Sophian i Vong (1995) pokazalo je da djeca u dobi od četiri godine ne razumiju dio-cjelina veze na kvantitativnoj razini. Stoga bi u budućnosti bilo dobro provesti ispitivanje slično našem na ispitanicima mlađe dobi, te vidjeti u kojem smjeru bi išli rezultati. Mali je broj istraživanja koji su se bavili ispitivanjem razumijevanja principa zbrajanja u kontekstu konkretnih objekata. Osim prethodno navedenih, većina dosadašnjih istraživanja provedena je na starijoj djeci i u kontekstu simboličkih zadataka.

U postupku je već navedeno kako je od ispitanika traženo da osim odgovora na pitanje imaju li medvjedići jednaki broj bombona, daju objašnjenje za svoj odgovor. Iako taj dio ispitivanja nije u okviru ovog diplomskog navesti ću neke od objašnjenja koja su dali ispitanici. Ispitanici vrtičke dobi davali su objašnjenja slična ovima: "Tin i Tina imaju jednaki broj bombona jer im je tako mama dala da se ne svađaju", "Tin i Tina imaju jednaki broj bombona da bi se isto udebljali", dok su ispitanici prvog razreda davali odgovore kao što su: "Oni imaju jednaki broj bombona jer imaju i plave, i crvene i zelene, nema veze što su drugačije složeni" ili "Oni imaju isti broj bombona".

Ukratko, rezultati dobiveni ispitivanjem razumijevanja principa zbrajanja u kontekstu konkretnih objekata kod predškolske djece i učenika prvog razreda pokazali su da ne postoji razlika u težini procjenjivanja tri principa odnosno djeca podjednako dobro razumiju i aditivnost i komutativnost i asocijativnost. Ispitivanjem postoji li razlika u razumijevanju aditivnosti, komutativnosti i asocijativnosti u kontekstu konkretnih objekata između predškolske djece i učenika prvog razreda pokazalo se da ne postoji statistički značajna razlika između te dvije skupine ispitanika u razumijevanju principa komutativnosti i asocijativnosti, no međutim "ulaskom" u školu djeca pokazuju bolji uspjeh u zadacima koji odražavaju princip aditivnosti. To podržava tvrdnju da matematička svojstva zbrajanja cijelih brojeva pružaju koristan okvir za istraživanje konceptualnog razvoja kod djece. Uvidom u rezultate može se uočiti da su i predškolska djeca iako nešto slabije od školske djece pokazala prilično dobro razumijevanje sva tri principa. Točnost s kojom su čak i predškolska djeca rješavala te zadatke sugerira da i mala djeca imaju bogato znanje pravila u načinima na koji su grupe objekata spojene zajedno i razdvojene. Ovi nalazi u skladu su sa teorijskim pretpostavkama da se dječje

razumijevanje dio-cjelina koncepata, ključnih za školsku aritmetiku pojavljuje u smislenom kontekstu već prije škole te imaju važne teorijske i edukacijske implikacije. Može se zaključiti da su principi zbrajanja koji su prezentirani u smislenom kontekstu prilično jasni predškolskoj djeci i da iznenađujuće velik broj djece razumije principe i prije nego krenu u školu.

Kako predškolska neformalna matematička znanja mogu pomoći u poučavanju matematike u školi

Kad se pogledaju početni udžbenici iz matematike za osnovnu školu stječe se dojam da djecu uvode u neko za njih potpuno novo područje. Učenje aritmetike najčešće počinje brojčanim zadacima u kojima se djeca susreću sa izrazima poput “ $3+5=$ ”. Naglo se ulazi u apstraktan svijet brojki i načina obilježavanja odnosa (+ i =). Razgovori sa prvoškolcima pokazuju da se oni pri susretu s takvim zadatkom najčešće pitaju “čega dva i čega tri”. S druge strane njihovo predškolsko iskustvo u rješavanju svakodnevnih problema omogućava im da bez mnogo teškoća odgovore na pitanja poput: “Imaš pet bombona, prijateljica ti da još dva. Koliko sad imaš bombona?” . No, zadatak poput “ $5+2$ ” ih zbunjuje. Jasno se pokazalo da djeca u dobi od tri ili četiri godine već pokazuju osjetljivost za baratanje sa veličinama kao i razmjerno razvijeno intuitivno matematičko razmišljanje (koje se u slabo obrazovanih kasnije razvija u tzv. “praktičnu matematiku”). Učenje aritmetike koje polazi od zadataka vrste “ $3+2$ ” ne nadograđuje se na temelje matematičkog razmišljanja postavljene u ranom djetinjstvu. Počinje se graditi posve novi sustav, a pritom se često odašilje poruka kako je matematika izvan školske učionice “nešto drugo”, ponekad i “manje vrijedno” od matematike u školi.

Istraživanja su pokazala da se temeljne matematičke spoznaje razvijaju kroz neposredan dodir s predmetima u djetetovoj okolini ili promatranjem modela koji manipuliraju veličinama (Wood, 1995; prema Vlahović-Štetić i Vizek-Vidović, 1998). Iako to iskustvo omogućava djeci da bez većih teškoća rješavaju neke matematičke probleme i da izvode neke računske radnje s prirodnim brojevima, isto je tako uočeno da među djecom postoje znatne razlike u načinu na koji su došla do određenih matematičkih spoznaja. Upravo zbog tih individualnih razlika potrebno je djeci, pri uvođenju u svijet apstraktne

matematike, omogućiti što raznovrsniji dodir s konkretnim materijalima, kako bi uspređujući različita iskustva mogla doći do općenitijih pojmova i spoznaja o prirodi matematike. Matematički postupci i vještine koje se uče izdvojeno iz smislenog konteksta ne mogu se lako primjeniti u stvarnim životnim situacijama koje zahtijevaju matematičko-logičko rezoniranje. Primjerice, Huges (1986, prema Vlahović-Štetić i Vizek-Vidović, 1998) je pokazao da i četverogodišnjaci mogu uspješno rabiti matematičke simbole “+” i “-“ ako shvaćaju svrhu i razlog za uporabu simbola.

Naše istraživanje također je pokazalo da predškolska djeca i učenici prvog razreda pokazuju prilično dobro razumijevanje osnovnih principa zbrajanja u smislenom kontekstu što znači da i prije škole djeca imaju određena matematička znanja, te bi to trebalo uzeti u obzir pri uvođenju djece u svijet apstraktne matematike.

6. ZAKLJUČAK

1. Ispitivanje je pokazalo da ne postoji statistički značajna razlika u razumijevanju tri osnovna principa zbrajanja: aditivnosti, komutativnosti i asocijativnosti u smislenom kontekstu kod predškolske djece i učenika prvog razreda osnovne škole, što je ispitano Friedmanovim testom ($\chi^2=1,156$; $p=0,56$).

Dobiveni rezultati nisu u skladu sa navodima u literaturi. Većina dosadašnjih istraživanja pokazala je da razumijevanje komutativnosti prethodi razumijevanju asocijativnosti (Close i Murtagh, 1986; Canobi i sur, 1998; Canobi i sur., 2002).

2. U okviru drugog problema Mann-Whitneyev test pokazao je da postoji statistički značajna razlika ($z=-2,151$; $p=0,03$) u razumijevanju principa aditivnosti u smislenom kontekstu između predškolske djece i učenika prvog razreda. No, razlika u razumijevanju principa komutativnosti i asocijativnosti između te dvije skupine ispitanika nije se pokazala statistički značajnom. ($z=-1,828$; $p=0,07$ i $z=-1,629$; $p=0,10$).

Dobiveni rezultati u skladu su sa očekivanjima. Canobi i sur. (2002) proveli su ispitivanje analogno našem i dobili da ne postoji razlika u razumijevanju principa komutativnosti i asocijativnosti u smislenom kontekstu između predškolske (4-5 godina) i školske (5-6 godina) djece, ali se pokazala statistički značajna razlika u razumijevanju principa aditivnosti između te dvije skupine ispitanika.

7. SAŽETAK

Cilj provedenog istraživanja bio je ispitati razumijevanje osnovnih principa zbrajanja: aditivnosti, komutativnosti i asocijativnosti u kontekstu konkretnih objekata (u našem ispitivanju su to bili medvjedići i bomboni), kako bi bolje razumijeli važnost i razvoj dio-cjelina znanja. Prepoznavanjem načina na koji je cjelina sastavljena od različitih dijelova predstavlja smisao broja i leži u osnovi mnogih veza među zadacima zbrajanja. Principi kao što su aditivnost, komutativnost i asocijativnost osnovna su svojstva zbrajanja, a istraživanje redoslijeda po kojem djeca uče o njima otvara put za razumijevanje razvoja dio-cjelina znanja. Ispitivanje je provedeno na dvije skupine ispitanika, skupini predškolske djece i skupini učenika prvog razreda osnovne škole. Prvi problem istraživanja bio je ispitati postoji li razlika u razumijevanju tri osnovna principa zbrajanja. Rezultati su pokazali da ne postoji statistički značajna razlika u razumijevanju principa u smislenom kontekstu odnosno ispitanici su podjednako dobro razumijeli svaki od principa. Drugi problem istraživanja bio je ispitati postoji li razlika u razumijevanju principa zbrajanja između predškolske djece i učenika prvog razreda osnovne škole. Dobiveni rezultati pokazali su da postoji statistički značajna razlika u razumijevanju principa aditivnosti u smislenom kontekstu između te dvije skupine djece, dok za principe komutativnosti i asocijativnosti nije dobivena statistički značajna razlika. No, treba naglasiti da su obje skupine bile prilično uspješne u rješavanju zadataka koji su odražavali razumijevanje osnovnih principa zbrajanja.

8. LITERATURA

1. BAROODY, A.J. (1985). Mastery of the basic number combinations: Internalization of relationships or facts?. *Journal of Research in Mathematics Education*, 16, 83-98.
2. BAROODY, A.J. i DOWKER, A. (2003). *The development of arithmetic concepts and skills - constructing adaptive expertise*. Lawrence Erlbaum Associates, London.
3. BAROODY, A.J. i GANNON, K.E. (1984). The development of the commutativity principle and economical addition strategies. *Cognition and Instruction*, 321-339.
4. BAROODY, A.J. i GINSBURG, H.P. (1986). The relationship between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. U J. Hiebert (Ur.), *Conceptual and procedural knowledge of mathematic*, 75-112, Hillsdale:Erlbaum.
5. CANOBI, K.H., PATTISON, P.E. i REEVE, R.A. (1998). The role of conceptual understanding in children`s addition problem solving. *Developmental Psychology*, Vol.34, Br.5, 882-891.
6. CANOBI, K.H., PATTISON, P.E. i REEVE, R.A. (2002). Young children`s understanding of addition concepts. *Educational Psychology*, Vol. 22, Br.5, 513-530.
7. COWAN, R. i MARTINS-MOURAO, A. (1998). The emergence of additive composition of number. *Educational Psychology*, Vol.18, Br.4.
8. COWAN, R. i RENTON, M. (1996). Do they know what they are doing? Children`s use of economical addition strategies and knowledge of commutativity. *Educational Psychology*, Vol.16, Br.4.

9. FUSON, K.C. (1982). An analysis of the counting-on procedure i addition. U T.P. Carpenter i T.A. Romberg (Ur.), Addition and Subtraction: A cognitive perspective, 67-82, Hillsdale: Erlbaum.
10. GALLISTEL, C.R. i GELMAN, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition*, 44, 43-74.
11. GELMAN, R. i GALLISTEL, C.R. (1978). The child's understanding of number. Cambridge, Harward University Press.
12. IVIĆ, I. (1971). Mogućnosti predškolskog deteta za učenje elemenata matematike. *Predškolsko dete* 1(2), 123-144.
13. PETZ, B. (1997). Osnovne statističke metode za nematematičare. Naklada Slap, Jastrebarsko.
14. RESNICK, L.B. (1992). From protoquantities to operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. U G. Leinhardt, R. Putnam, R.A. Hattrup (Ur.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (Vol. 19, 275-323), Hillsdale: Erlbaum.
15. RITTLE-JOHNSON, B. i SIEGLER, R.S. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review of the literature. U C. Donlan (Ur.), *The development of mathematical skills*, 75-110. Hove, East Sussex England: Psychology Press.
16. ROGERS, D. i SLOBODA, A.J. (1987). *Cognitive Processes in Mathematics*. Clarendon Press, Oxford.

17. SIEGLER, R.S. (1987). The perils of averaging data over strategies: an example from children's addition. *Journal of Experimental Psychology, General*, 116, 250-264.
18. SIEGLER, R.S. i JENKINS, E. (1989). How children discover new strategies. Hillsdale, Nj: Lawrence Erlbaum Associates.
19. SOPHIAN, C., HARLEY, M. i MARTIN, C.S.M. (1995). Relational and representational aspects of early number development. *Cognition and Instruction*, 13, 253-268.
20. SOPHIAN, C. i VONG, K.I. (1995). The parts and wholes of arithmetic story problems: developing knowledge in the preschool years. *Cognition and Instruction*, 469-477, Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
21. STARKEY, P. (1992). The early development of numerical reasoning. *Cognition*, 43, 93-126.
22. VIZEK-VIDOVIĆ, V., VLAHOVIĆ-ŠTETIĆ, V., RIJAVEC, M. i MILJKOVIĆ, D. (2003). *Psihologija obrazovanja. Udžbenici sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.*
23. VLAHOVIĆ-ŠTETIĆ, V. i VIZEK-VIDOVIĆ, V. (1998). *Kladim se da možeš...-psihološki aspekti početnog poučavanja matematike – priručnik za učitelje. Udruga roditelja "Korak po korak", Zagreb.*

PRILOZI